Mathématique

1ère S2 / 2016-2017

Mis à jour le 22 décembre 2017 à 18:36

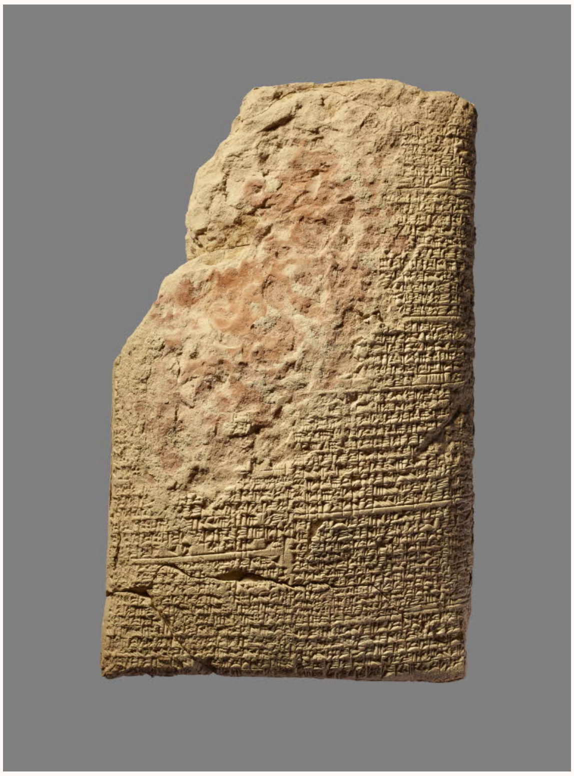
Une année de mathématiques en 1ère S

Lycée International de Londres
WINSTON CHURCHILL

Guillaume CONNAN

THÈME N° 1

Second degré



Comme en atteste la tablette 13901 stockée au British Museum (mais malheureusement non exposée), on sait résoudre les équations du second degré depuis quatre millénaires...Cependant, l'écriture algébrique moderne a un peu plus de trois siècles, bien avant l'arrivée de l'iPaD. Nous allons essayer de franchir 4000 mille ans d'histoire de l'humanité en trois semaines...

1 Ah...les identités remarquables

« Reprenez donc un peu de thé » propose le Lièvre de Mars.
« Je n'ai rien pris du tout, je ne saurai donc reprendre de rien ! »
« Vous voulez dire que vous ne sauriez reprendre de quelque chose » répartit le Chapelier.
« Quand il n'y a rien, ce n'est pas facile d'en reprendre ».

— Alors comme ça, vous êtes étudiante ?

— Oui, en mathématique par exemple.

— Alors que vaut cette fraction : un sur deux sur trois sur quatre ?

— Eh bien ...

— Elle vaut deux tiers, la devança le Loir.

— Ou trois huitièmes si vous préférez, ajouta le Lièvre de Mars.

— Ou encore un sur vingt-quatre, affirma le Chapelier.

— En fait, je crois que...

— Aucune importance ! Dîtes-nous plutôt combien vous voulez de sucre dans votre thé ?

— Deux ou trois, ça dépend de la taille de la tasse.

— Certainement pas, car de toute façon, deux ou trois c'est pareil.

— Parfaitement ! approuva le Loir en fixant Alice qui écarquillait les yeux.

— Ce n'est pourtant pas ce qu'on m'a appris, fit celle-ci.

— Pourtant, ce n'est pas compliqué à comprendre, en voici une démonstration des plus élémentaires
On sait que pour tout entier n on a successivement

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - 2n - 1 = n^2$$

Retranchons $n(2n+1)$ des deux côtés

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

Mézalor, en ajoutant $(2n+1)^2/4$, on obtient

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

Soit

$$\left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2$$

En passant à la racine carrée, on obtient

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

d'où

$$n+1 = n$$

Et si je prends $n = 2$, j'ai aussitôt $3 = 2$

— Alors, qu'est-ce que vous en dites ?
— Je...commença Alice.
— D'ailleurs, cela prouve que tous les entiers sont égaux, la coupa le Lièvre de Mars.
— Pas mal du tout ! Qu'en dites-vous mademoiselle la mathématicienne ?
— Je vais vous dire tout de suite ce que j'en pense.
— Ah non ! Nous préférerions de loin que vous pensiez ce que vous allez nous dire.
— C'est pareil ! grinça Alice qui commençait à en avoir assez.
— Comment ça, c'est pareil ? Dire ce que l'on pense ce serait pareil que penser ce que l'on dit ? S'étrangla le Lièvre de Mars.
— Incroyable ! Et manger ce qu'on voit ce serait pareil que voir ce qu'on mange ?
— Mais...
— Et respirer quand on dort pareil que dormir quand on respire ?
— En logique, nous vous mettons 3 sur 5.
— Autant dire moins que un.
— C'est à dire zéro, puisque si 2=3 alors 1=0.
— Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
— On se demande ce qu'on vous apprend à l'école !Tiens, et je peux même vous donner une démonstration très simple.
Prenez deux nombres non nuls et égaux :

$$a = b$$

Alors

$$a^2 = ab$$

et

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Un peu d'identité remarquable :

$$(a+b)(a-b) = b(a-b)$$

Je simplifie :

$$a + b = b$$

Mais comme $a = b$:

$$2b = b$$

et je simplifie :

$$2 = 1$$

— C'est de la folie pure, pensa Alice...

2 Quadratic equations

2 1 Completing the square

You know how to solve quadratic equations such as $x^2 = 49$ or even $4x^2 = 9$...do you ? ? ?

Going one stage further (Yes we can), we can solve quadratic equations such as those in the following example :

$$4(x+5)^2 - 59 = 0$$

Add 59 to both sides

$$4(x+5)^2 = 59$$

Divide both sides by 4

$$(x+5)^2 = \frac{59}{4}$$

Everybody is positive : let's take the square root of both sides

$$x+5 = \pm\frac{\sqrt{59}}{2}$$

Let's rearrange to make things look better

$$x = -5 \pm \frac{\sqrt{59}}{2}$$

This example paves the way for a method which may be used for any quadratic equation...Can you see where this road leads ?

3 Naissance de l'Algèbre

Voici notre héros :

Al Khwarizmi
(780 - 850)

...ou si vous préférez Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.
Son livre le plus célèbre, qu'il a écrit entre 813 et 833 alors qu'il travaillait à *la maison de la sagesse* de Bagdad, se nomme :

c'est-à-dire Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab *al-jabr* wa-l-muqabala
ou bien encore :

L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

— Pas de notations ni de nombres ! Tous les nombres et calculs sont décrits par des phrases :

— nombres (*dirham*) ;

— racines (*jidhr, ce qui est caché...*)

— choses (*shay* transposé en espagnol *Xay* qui a donné notre x)

— biens (*« mâl » en arabe*) carrés des racines.

Al-jabr signifie réduction, au sens de « réduction d'une fracture ». « Algebrista » est d'ailleurs entré dans la langue espagnole pour désigner un rebouteux.
L'al-jabr consiste à réduire l'équation en éliminant les soustractions par addition de termes dans les deux membres.
En effet, à l'époque d'Al-Khwarizmi, on ne travaillait qu'avec des entiers positifs.
Par exemple :

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

est transformé, par al-jabr, en

$$x^2 + 4x^2 = 40x$$

puis

$$5x^2 = 40x$$

En effet, Al-Khawarizmi nomme les termes soustraits (comme $4x^2$ dans l'exemple précédent) : nâqis, « terme enlevé ».
Le même mot est employé pour désigner le membre manquant d'un amputé.
Al-jabr consiste donc à restaurer ce qui est manquant dans une équation.
Al-muqabala signifie « confrontation ».

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

contient des carrés dans les deux membres, chaque membre est pourtant une somme.
Al-muqabala consiste donc à soustraire une quantité afin que des quantités de même type (dirham, racine ou carré) ne puissent se trouver à la fois dans les deux membres de l'équation. Dans

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

on soustrait x^2 pour obtenir

$$5 = 40x + 3x^2$$

On retrouve alors un des six types d'équations qu'Al-Khwarizmi a étudié. Une méthode de résolution générale de chaque type était proposée ainsi qu'une démonstration, souvent géométrique. Voici un problème proposé par Al-Khwarizmi :

Un bien et dix de ses racines égale trente-neuf dirhams.

Il y a une autre figure qui mène également à cela et c'est : la surface (AB), étant le bien, nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous divisons par deux les dix, elles deviennent cinq, nous les transformons en deux surfaces sur les flancs de la surface (AB), et ce sont les deux surfaces (J), (N). La longueur de chacune des deux surfaces est cinq coudées -et c'est la moitié des dix racines- et sa largeur est comme le côté de la surface (AB). Il nous reste alors un carré dans l'angle de la surface (AB), et c'est cinq par cinq, et c'est la moitié des dix racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface. Or nous savons que la première surface est le bien et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont dix racines. Tout cela est donc trente neuf, et il reste pour compléter la surface la plus grande, un carré de cinq par cinq, et c'est vingt-cinq. Nous l'ajoutons à trente neuf afin que se complète la surface la plus grande, et c'est la surface (DE). Tout cela vaudra soixante-quatre. Nous prenons sa racine, et c'est huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si nous lui retranchons l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté -et c'est cinq- il reste trois, et c'est le côté de la surface (AB) qui est le bien, et c'est sa racine ; et le bien est neuf.

Recherche

Faites un joli dessin te réfléchissez à la méthode proposée par Al.
Essayez ensuite avec $x^2+6x=40$ puis avec $x^2+6x=-10$...

Nous venons de voir qu'Al-Khwarizmi n'utilisait pas de notations spéciales pour désigner les équations qu'il résolvait.
Il a fallu des siècles pour arriver au stade actuel.

— DIOPHANTE, IIIe siècle : $\Delta^{\Upsilon}\delta\ \zeta\gamma\ \epsilon\sigma\tau\iota\ \iota$
— Nicolas CHUQUET, fin XVe siècle : 4^2 p 3^1 egault 10^0
— TARTAGLIA, début XVIe : 4q p 3R equale 10N
— Simon STÉVIN, fin XVIe : 4② +3① egales 10⓪
— François VIÈTE, vers 1600 : 4 in A quad +3 in A æquatur 10
— René DESCARTES, vers 1640 : $4xx+3x \propto 10$
— Guillaume CONNAN, vers 2016 : $4x^2+3x=10$

Vous remarquez donc que les notations sont relativement récentes mais on sait résoudre des équations du second degré depuis 4000 ans...

René Descartes

Étudiez le premier chapitre de l'œuvre de René DESCARTES *Géométrie*, en particulier les pages 7 à 10 : https://www.bibnum.education.fr/mathematiques/geometrie/le-livre-premier-de-la-geometrie-de-descartes
Clarifiez ce que DESCARTES exposait en 1637.

4 STENDHAL et l'enseignement des mathématiques

Stendhal
(1783 - 1842)

Vous connaissez STENDHAL, de son vrai nom Henry BEYLE. Vous ne savez peut-être pas cependant qu'il fut un lycéen passionné par les mathématiques et qu'il renonça à rentrer à Polytechnique pour s'engager dans l'Armée d'Italie menée par BONAPARTE.
Energie, passion, horreur de l'hypocrisie, désir du naturel, chasse au bonheur, ou égotisme : tous ces mots dessinent la silhouette de STENDHAL.
Il écrit en 1835-36 la *Vie de Henry Brulard*, récit autobiographique où il décrit une personnalité déchirée, passionnée, révoltée, résolument libérale et athée : formé à l'Ecole centrale de Grenoble, Henry, malgré un corps enseignant hétéroclite, apprend à aimer les mathématiques, la logique, la pensée claire contre le conformisme et contre l'hypocrisie.
C'est grâce à un prix en mathématique qu'il peut fuir Grenoble en octobre 1799, à seize ans, pour tenter d'entrer à l'École Polytechnique à Paris.
Voici un premier extrait de cette œuvre :

> *Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie, l'hypocrisie à mes yeux c'était ma tante Séraphie, Mme Vignon, et leurs prêtres. Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus* $(- \times - = +)$ *? C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle algèbre. On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on*

> *me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient. M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise... »*
>
> *Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de moins par moins à un fort, il me riait au nez ; tous étaient plus ou moins comme Paul-Émile Teysseyre et apprenaient par cœur. Je leur voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations : « Il est donc évident », etc. Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Mais il s'agissait de choses évidentes pour moi, et desquelles malgré la meilleure volonté il était impossible de douter. Les mathématiques ne considéraient qu'un petit coin des objets (leur quantité), mais sur ce point elles ont l'agrément de ne dire que des choses sûres, que la vérité, et presque toute la vérité. Je me figurais à quatorze ans, en 1797, que les hautes mathématiques, celles que je n'ai jamais sues, comprenaient tous ou a peu près tous les côtés des objets, qu'ainsi, en avançant, je parviendrais à savoir des choses sûres, indubitables, et que je pourrais me prouver à volonté, sur toutes choses. Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur $- \times - = +$ ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les forts auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi. J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que $-$ par $-$ donne $+$ soit vrai, puisque, évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables.*

Heureusement, le jeune Henry finit par rencontrer des pédagogues plus compétents...

> *« Citoyens, par où commençons-nous ? Il faudrait voir ce que vous savez déjà. »*
>
> *« Mais nous savons les équations du second degré ».*
>
> *Et, en un homme de sens, il se mit à nous montrer ces équations, c'est-à-dire la formation d'un carré de $a+b$, par exemple, qu'il nous fit élever à la seconde puissance : $a^2+2ab+b^2$, la supposition que le premier membre de l'équation était un commencement de carré, le complément de ce carré, etc., etc., etc. C'étaient les yeux ouverts pour nous ou du moins pour moi.* **Je voyais enfin le pourquoi des choses, ce n'était plus une recette d'apothicaire tombé du ciel pour résoudre les équations.**

Commentez ces deux textes de STENDHAL en vous référant à vos années d'étude des mathématiques...

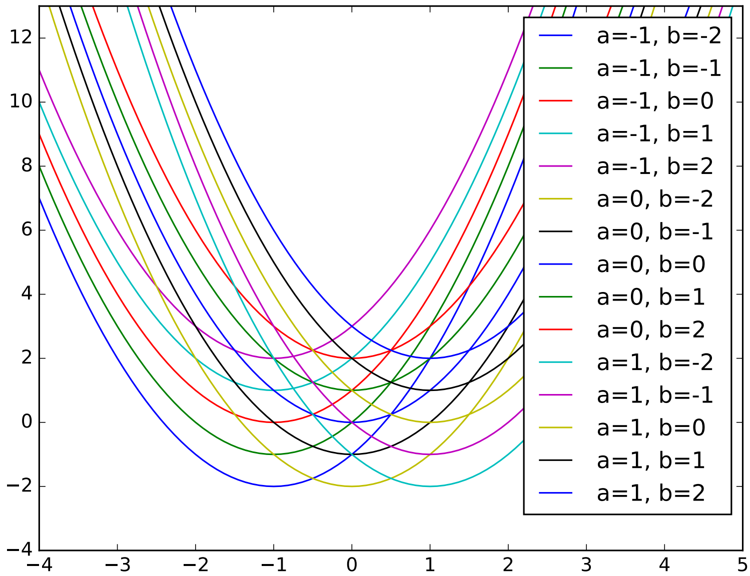
5 Représentation graphique

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def paras(xmin, xmax, ymin, ymax) :
    X = np.linspace(xmin, xmax + 1, 100)
```

```
    for a in range(-2, 3) :
        for b in range(-2, 3) :
            plt.plot(X, (X - a)**2 + b, label= 'a=' + str(a) + ', b=' + str(b))
    plt.legend()
    plt.ylim(ymin, ymax)
    plt.show()
```

Le code précédent donne :



Comment l'expliquer ? Quels enseignements en tirez-vous ?

6 Gavarit' Pa Roussky ?

De quoi ça parle ?

92. Изобразите схематически график функции:

а) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2-3$; б) $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2+3$.

93. Используя шаблон параболы $y=x^2$, постройте график функции:

а) $y=(x-2)^2+3$; б) $y=-(x-3)^2+5$.

94. С помощью шаблона параболы $y=x^2$ постройте график функции:

а) $y=(x+3)^2-4$; б) $y=-(x+4)^2-2$.

95. На рисунке 26 изображены графики функций:

а) $y=-\frac{1}{3}(x+4)^2$; в) $y=\frac{1}{3}x^2+4$;

б) $y=\frac{1}{3}(x-4)^2-1$; г) $y=-\frac{1}{3}x^2-2$.

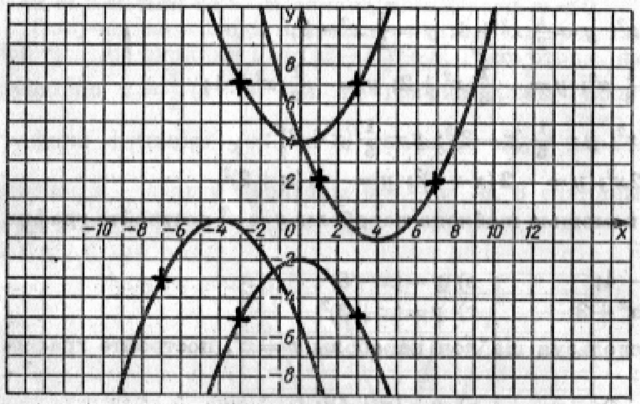


Рис. 26

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

96. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y=12x^2-3$; б) $y=6x^2+4$; в) $y=-x^2-4$.

97. При каких значениях a функция $y=ax^2+5$ имеет нули?

Упражнения для повторения

98. Решите уравнение:

а) $0{,}6a-(a+0{,}3)^2=0{,}27$; б) $\frac{y^2-2y}{4}=0{,}5y(6-2y)$.

24

99. Решите неравенство:

а) $5x-0{,}7<3x+5{,}1$; в) $2x+4{,}2\leqslant 4x+7{,}8$;

б) $0{,}8x+4{,}5\geqslant 5-1{,}2x$; г) $3x-2{,}6>5{,}5x-3{,}1$.

100. Найдите приращение функции $y=x^2$ при изменении x от 2 до 5 и от 5 до 8. Сравните полученные результаты.

7. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$. Выделим из трехчлена ax^2+bx+c квадрат двучлена:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Отсюда $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Мы получили формулу вида $y=a(x-m)^2+n$, где $m=-\frac{b}{2a}$, $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y=ax^2+bx+c$ есть парабола, которую можно получить из графика функции $y=ax^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y. Отсюда следует, что график функции $y=ax^2+bx+c$ есть парабола, вершиной которой является точка $(m; n)$, где $m=-\frac{b}{2a}$, $n=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. Осью симметрии параболы служит прямая $x=m$, параллельная оси y. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $a<0$ — вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;

2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;

3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m=-\frac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y=ax^2+bx+c$, так как при $x=m$

$$y=ax^2+bx+c=a(x-m)^2+n=n.$$

Приведем примеры построения графиков квадратичных функций.

2* 25

7 Résumé

7 1 Fonction polynôme

Définition 1 - 1

On appelle *fonction polynôme* ou plus simplement *polynôme* toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{où pour } i = 0, 1, \ldots, n, \text{ on a } a_i \in \mathbb{R}$$

Remarque

Quelques points de vocabulaire :

— si n est le plus grand entier pour lequel $a_n \neq 0$, on dit que le *degré* du polynôme est n ;

— chaque a_i est appelé *coefficient* d'ordre i du polynôme ;

— les termes $a_i x^i$ sont appelés les *monômes* ;

— un polynôme formé de trois monômes est parfois appelé trinôme et plus particulièrement, si $a \neq 0$, le polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est appelé trinôme du second degré (même si b ou c sont nuls) ;

— par abus d'écriture on parle du polynôme $ax^2 + bx + c$ (à la place de $x \mapsto ax^2 + bx + c$).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2)(3x - 5)$. La fonction f est une fonction polynôme car en développant, on peut écrire :

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$$

Ainsi f est un polynôme de degré 3. Le coefficient de f d'ordre 2 est -5.

Exemple

Les fonctions affines non constantes sont des polynômes de degré 1.
Les fonctions constantes sont des polynômes de degré 0.
La fonction constante nulle est aussi appelée polynôme nul.

Théorème 1 - 1

admis
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et que leurs coefficients de même ordre sont deux à deux égaux.

Exemple

Pour tout réel x on a $2x^3 - 5x^2 + 4 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Alors la propriété 1 - 1 nous permet d'affirmer que :
$a_3 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 0$ et $a_0 = 4$.

7 2 Polynôme de degré 2

7 2 1 Forme canonique

Théorème 1 - 2

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré (donc $a \neq 0$). Il existe des réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 - \beta$$

L'écriture $a(x + \alpha)^2 - \beta$ est appelée *forme canonique* du trinôme.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+2\times x\times\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}-\frac{-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}$$

On a alors $\alpha=\frac{b}{2a}$ et $\beta=\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Exemple

Déterminer la forme canonique du trinôme f défini par $f(x)=2x^2-5x+3$, puis résoudre $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}
2x^2-5x+3 &= 2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)+3\\
&= 2\left(x^2-2\times x\times\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)+3\\
&= 2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)+3\\
&= 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+\frac{24}{8}\\
&= 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Résolvons l'équation $f(x)=0$:

$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\iff 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}=0\\
&\iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}=0\\
&\iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=0\\
&\iff \left(x-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)=0\\
&\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=0\\
&\iff x=\frac{3}{2}\text{ ou } x=1
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S}=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$$

7 2 2 Représentation graphique

Soit f un polynôme du second degré défini par $f(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$). On a vu avec la propriété 1 - 2 qu'il existe deux réels α et β tels que $f(x)=a(x+\alpha)^2-\beta$.

En notant $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de la fonction $x\mapsto ax^2$ (qui s'obtient facilement à partir de la courbe représentant la fonction carré), on a $\mathscr{C}_f=t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_a)$; où $\vec{u}=-\alpha\vec{\imath}-\beta\vec{\jmath}$.

Ainsi, la représentation graphique d'une fonction polynôme est une parabole tournée vers le haut si $a>0$ et tournée vers le bas si $a<0$.

Exemple

On reprend le polynôme f de l'exemple 1.7.2.1. En notant $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x\mapsto 2x^2$.
On a alors $\mathscr{C}_f=t(\mathscr{C})$ où $\vec{u}=\frac{5}{4}\vec{\imath}-\frac{1}{8}\vec{\jmath}$.

7 3 Équation de degré 2

Définition 1 - 2

Un équation du second degré est une équation pouvant s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

On appelle *discriminant* d'une telle équation le réel noté $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque

Vocabulaire
Si P est un polynôme du second degré, alors l'équation $P(x) = 0$ est une équation du second degré. Les solutions de cette équation sont appelées les *racines* du polynôme P.

Théorème 1 - 3

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$) une équation du second degré. On note Δ son discriminant. On a trois cas possibles :

- si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration :
D'après la propriété 1 - 2 et sa démonstration, on sait qu'il existe α et β réels tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 - \beta \text{ avec } \alpha = \frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Ainsi, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$ on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2} = 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $4a^2 > 0$ (car $a \neq 0$), on a alors trois cas possibles :

- si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'expression $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est donc la somme d'un carré et d'un réel strictement positif ; elle ne peut donc pas être nulle : l'équation n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$, alors l'équation de départ est équivalente à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$ alors $\sqrt{\Delta}$ existe et on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \tfrac{b}{2a} - \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \tfrac{b}{2a} + \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\iff \left(x + \tfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \tfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation a alors deux solutions $x_1 = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.
L'équations a donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On a donc : $\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. La solution x_2 est appelée *nombre d'or* et souvent noté Φ.

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{2x^2-3x-2}$.
La fonction f est une fonction rationnelle [a] ; elle est donc définie pour tous les x qui n'annulent pas le dénominateur. Les valeurs interdites sont donc les solutions de l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$.
Calculons le discriminant de cette équation du second degré : $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times(-2) = 25 > 0$.
L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2} - \frac{1}{2}$.
L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}; 2\}$.

a. Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Remarque

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré $(a \neq 0)$.
Si a et c sont de de signes contraires, alors $ac \leq 0$ et donc $-4ac \geq 0$. Dans ce cas, $\Delta \geq 0$.

Remarque

Il est parfois utile de chercher des solutions « évidentes » : par exemple si $a+b+c = 0$ alors $x = 1$ est une solution évidente car $a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c = 0$.
L'autre solution est alors $\frac{c}{a}$.
En effet si $x = \frac{c}{a}$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(\frac{c}{a}\right)^2 + b \times \frac{c}{a} + c$. En simplifiant on obtient :

$$ax^2 + bx + c = \frac{ac^2 + bc + ca}{a} = \frac{c(a+b+c)}{a} = 0$$

Donc $\frac{c}{a}$ est bien solution de l'équation.

7 4 Signe d'un trinôme de degré 2

7 4 1 Factorisation d'un trinôme du second degré

Théorème 1 - 4

admis

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré $(a \neq 0)$ et Δ son discriminant. On a alors trois cas possibles :

— si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable ;

— si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

— si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple

Factoriser le trinôme $3x^2 - 5x - 2$.
On calcule $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0$; donc le trinôme a deux racines :
$\alpha = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times 3} = -\frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 3} = 2$. On a alors : $3x^2 - 5x - 2 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$.

7 4 2 Signe d'un trinôme du second degré

Théorème 1 - 5

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré. On pose $\Delta = b^2-4ac$.

si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, ax^2+bx+c est du signe de a.

si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, ax^2+bx+c est du signe de a.

si $\Delta > 0$, alors ax^2+bx+c

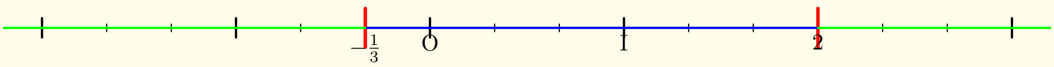
— est du signe de a pour x « à l'extérieur des racines » de ax^2+bx+c,

— est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines » de ax^2+bx+c.

Démonstration :
Si $\Delta < 0$, on a $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ (D'après la dém de la prop 1 - 2.) La parenthèse est donc strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc ax^2+bx+c est du signe de a.
On utilise une démonstration analogue pour le cas où $\Delta = 0$.
Enfin, si $\Delta > 0$, on utilise un tableau de signes pour obtenir le résultat annoncé.

Exemple

On considère le trinôme $6x^2-10x-4$. $\Delta = 10^2-4\times 6\times(-4) = 196$. Les racines du trinôme sont : $x_1 = \frac{10-\sqrt{196}}{2\times 6} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{10+\sqrt{196}}{2\times 6} = 2$.
Représentons sur un axe gradué « l'intérieur » et « l'extérieur » des racines :



En vert, « l'extérieur » des racines, et en bleu « l'intérieur » des racines :

— pour $x \in \left]-\frac{1}{3};2\right[$ (x à l'intérieur des racines), $6x^2-10x-4$ est du signe contraire de 6 soit $6x^2-10x-4<0$;

— pour $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]2;+\infty\right[$ (x à l'extérieur des racines), $6x^2-10x-4$ est du signe de 6 soit $6x^2-10x-4>0$.

On regroupe ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$6x^2-10x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Un trinôme, quatre inéquations possibles :

— la solution de l'inéquation $6x^2-10x-4>0$ est : $\mathscr{S} = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]2;+\infty\right[$;

— la solution de l'inéquation $6x^2-10x-4\geq 0$ est : $\mathscr{S} = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[2;+\infty\right[$;

— la solution de l'inéquation $6x^2-10x-4<0$ est : $\mathscr{S} = \left]-\frac{1}{3};2\right[$;

— la solution de l'inéquation $6x^2-10x-4\leq 0$ est : $\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{3};2\right]$.

7 5 Récapitulons...

7 5 1 Représentation graphique d'un trinôme

Soit $\mathscr{P}$ une parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ dans un repère orthogonal. On ne connait pas la position précise de $\mathscr{P}$ dans le repère, mais on peut étudier sa position par rapport à l'axe des abscisses ; en effet :

si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions donc $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;

si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : on dit que $\mathscr{P}$ est *tangente* à l'axe des abscisses ;

si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution donc $\mathscr{P}$ ne rencontre pas l'axe des abscisses.

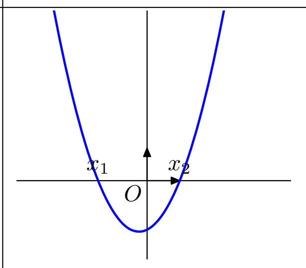
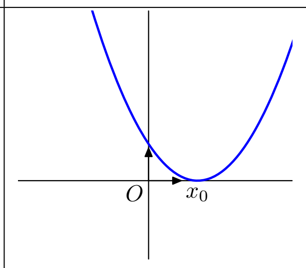
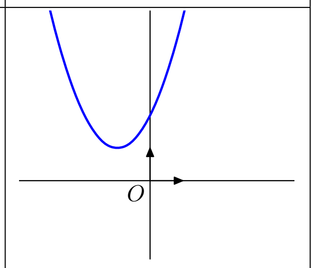
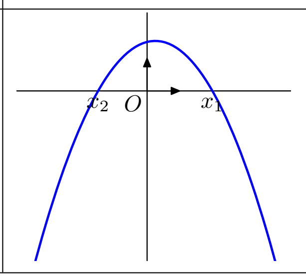
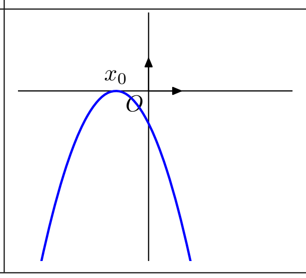
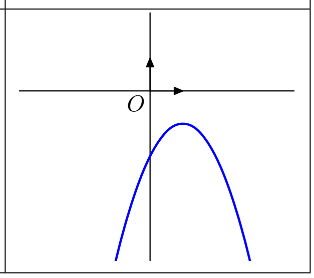
De plus, on montre facilement à l'aide du produit d'une fonction par un réel que si $a > 0$, la parabole est « tournée » vers le haut, et si $a < 0$, la parabole est « tournée » vers le bas.

Enfin, en utilisant l'écriture canonique du trinôme $ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 - \beta$, on obtient les coordonnées du sommet S de la parabole : $S(-\alpha; -\beta)$. (On avait trouvé $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.)

On regroupe les résultats dans le tableau suivant en notant :

— $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

— $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

7 5 2 Programmons...

Voici le programme permettant à votre calculatrice de vous donner le discriminant et les éventuelles racines d'un polynôme du second degré s'écrivant sous la forme Ax^2+Bx+C :

Programme pour une casio :

"CALCUL DISCRIMINANT :"
"$AX^2 + BX + C$"
"A"?→A
"B"?→B
"C"?→C
"DELTA=":$B^2 - 4 \times A \times C \to D$◢
D=0⇒Goto 1
D<0⇒Goto 2
D>0⇒Goto 3
Lbl 1
"UNE SOLUTION"
$-B/(2 \times A)$◢
Stop
Lbl 2
"AUCUNE SOLUTION"
Stop
Lbl 3
"2 SOLUTIONS"
"X1=":$(-B - \sqrt{D})/(2 \times A)$◢
"X2=":$(-B + \sqrt{D})/(2 \times A)$◢
Stop

Programme pour une TI :

PROGRAM :DEGRE2
Disp "CALCUL DISCRIMINANT :"
Disp "$AX^2 + BX + C$"
Prompt A,B,C
ClrHome
$B^2 - 4 \times A \times C \to D$
Disp "DISCRIMINANT",D
If abs(D)=0
Then
Disp "1 SOLUTION",$-B/(2 \times A)$◢
Else
If $D > 0$
Then
Disp "2 SOLUTIONS"
Disp $(-B - \sqrt{(D)})/(2 \times A)$◢
Disp $(-B + \sqrt{(D)})/(2 \times A)$◢
Else
Disp "AUCUNE SOLUTION"
End
End

En Python :

```python
from numpy import sqrt

def delta(a, b, c) :
    """
    retourne le discriminant de l'équation ax^2 + bx + c
    """
    return b**2 - 4*a*c

def sol_quadratic(a, b, c) :
    """
    retourne l'ensemble des solutions de l'équation
    ax^2 + bx + c = 0
    """
    d = delta(a, b, c)
    if d < 0 :
        return {}
    else :
        return {(-b - sqrt(d)) / (2*a), (-b + sqrt(d)) / (2*a) }
```

8 Petits exercices simples pour se rassurer

Recherche 1 - 1

Développer, réduire et ordonner :

$A = (4x - 5)^2$

$B = ((2x - 3)(2x + 3)$

$C = (4x - 5)(2x + 3)$

$D = (5x + 1)^2$

Recherche 1 - 2

Factoriser (sans avoir à développer) :
$E = (4x-3)(x+4) - (4x-3)(3x+1)$
$F = (3x+2)^2 - 25$
$G = (3x+4)^2 - (2x+1)^2$
$H = (2x+3)(x+5) - (x+5)^2$

Recherche 1 - 3

Solve the following equations, wherever possible, by completing the square and then using the discriminant. If there are no real roots, say so.

1. $8x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 8x = 84$
3. $9x^2 + 13x = 10$
4. $3x^2 + 4x = 5$
5. $x^2 + 17x - 18 = 0$
6. $3x^2 + 10x + 3 = 0$
7. $11x^2 - 12 = x$
8. $8x + 2 = -7x^2$
9. $x^2 + 111x = 3400$
10. $7x^2 - 26x = 1008$

Recherche 1 - 4

Pour chaque fonction,

— retrouver sa forme canonique ;
— donner l'allure de sa courbe ;
— donner son tableau de variations.

$f(x) = -2x^2 + 20x + 7$

$g(x) = x^2 + 8x - 3$

$h(x) = 5x^2 - 10x + 13$

NB : on pensera à vérifier à la calculatrice.

Recherche 1 - 5

Pour chaque fonction,

— retrouver sa forme développée ;
— donner l'allure de sa courbe ;
— donner son tableau de variations.

$f(x) = 3(x-4)^2 - 5$

$g(x) = -2(x-3)^2 + 6$

$h(x) = (x+1)^2 - 8$

$k(x) = -5(x-2)^2 + 4$
NB : on pensera à vérifier à la calculatrice.

Recherche 1 - 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 = 9$
2. $x^2 = -9$
3. $(x-5)^2 = 3$

4. $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$
5. $(3x+5)^2 = (x+1)^2$
6. $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$
7. $2016x^2 + x - 2017 = 0$

Réfléchissez avant d'agir...

Recherche 1 - 7

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dessiner une courbe possible de $(\mathcal{C}_f)$ sachant que $a < 0$ et $\Delta < 0$.

Recherche 1 - 8

Donner le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(2x-3)(-x+4)$.

Recherche 1 - 9

Soit f une fonction du second degré.
Sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ a pour sommet $S(4 ; 9)$ et elle passe par le point $A\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$.

1. Quel est l'axe de symétrie de cette parabole ?
2. En déduire le deuxième point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. Déterminer sa forme développée.
5. Déterminer sa forme factorisée.
6. Vérifier que la réponse de la question 2) est juste.

Recherche 1 - 10

1. Résoudre l'inéquation $3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0$.
2. Résoudre l'inéquation $-2x^2 - 12x - 10 \leqslant 0$.

Recherche 1 - 11

Soit f une fonction du second degré de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.

1. Pour retrouver les points d'intersection éventuels de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses, est-il préférable d'avoir sa forme canonique, sa forme développée ou sa forme factorisée ? Justifier.
2. Pour retrouver le sommet S de $(\mathcal{C}_f)$, est-il préférable d'avoir sa forme canonique, sa forme développée ou sa forme factorisée ? Justifier.

Recherche 1 - 12

On donne $f(x) = -3(x+4)(x-2)$.

1. Comment s'appelle la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de cette fonction ? Justifier.
2. Que peut dire de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ à partir de la forme donnée ?
3. Déterminer sa forme canonique.
4. En déduire son tableau de variations.

Recherche 1 - 13

Peut-on trouver 3 carrés dont les côtés sont des entiers consécutifs et dont la somme des aires vaut 15125 ?

Recherche 1 - 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
2. $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$
3. $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$
4. $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$
5. $4x^2(\sqrt{6} + 4\sqrt{3})x + \sqrt{18}$

Recherche 1 - 15

Deux petits poneys parcourent 195km. La vitesse moyenne de l'un est 4km/h supérieure à celle de l'autre. Quelles sont les vitesses des petits poneys ?

Recherche 1 - 16

Trouvez deux nombres dont la somme vaut 57 et le produit 540.

Recherche 1 - 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$
2. $\frac{x^2-x+1}{x+2} = 2x + 3$

Recherche 1 - 18

On note $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a non nul. Démontrez que si a et c sont de signes opposés alors P admet au moins une racine réelle.

Recherche 1 - 19

Déterminez les triangles rectangles dont les côtés sont des entiers consécutifs.

Recherche 1 - 20

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = 4$
2. $x + 1 = \sqrt{2x - 1}$

Recherche 1 - 21

Vérifiez que $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des racines de P avec :

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$$

En déduire une factorisation de P.

Recherche 1 - 22

Quel est l'ensemble de définition de $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+7}}$?

Recherche 1 - 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $-x^2 + 5 - \sqrt{5} = 0$

Recherche 1 - 24

Une entreprise syldave produit des matraques à condensation nucléaire hyperstatique pour le ministère de la culture de Syldavie.
On note la fonction coût total C et la fonction recette totale R.
On sait que $C(q) = 0,2q^2+q+90$ et $R(q) = 12q$ avec q la quantité de matraques fabriquées par jour exprimée en milliers, les recettes et les coûts étant exprimés en Mzlrtčzßtđ.

1. Exprimez $B(q)$, le bénéfice correspondant en Mzlrtčzßtđ.
2. Déterminez par le calcul le nombre de matraques qu'il faut fabriquer pour que l'entreprise soit rentable.

3. Étudiez le sens de variation de B et dressez son tableau de variation.
4. Déterminez quelle production permet d'obtenir un bénéfice maximum.

Recherche 1 - 25

Début 2014, Klow, la capitale syldave, comptait 12000 habitants. En Janvier 2015, on s'aperçoit que Klow a perdu un certain pourcentage (noté t) de sa population qui a fuit vers la Bordurie voisine. Mais l'année suivante, les émigrants se sont aperçu que la vie étaient pire en Bordurie et reviennent en fraude avec quelques Bordures et Klow voit ainsi sa population croître de nouveau : en Janvier 2016, elle a gagné $(2t)\%$ en population par rapport à Janvier 2015. Elle compte ainsi, en Janvier 2016, 12285 habitants

1. Déterminer (en fonction de t) le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de population de $t\%$ suivie d'une augmentation de $(2t)\%$.
2. Expliquer avec soin pourquoi t est solution de l'équation $-2.4t^2 + 120t - 285 = 0$ (*si vous trouvez une autre équation dont t est solution, vous pouvez bien entendu la donner ici, en justifiant avec soin*)
3. Calculer le pourcentage t sachant que la population de la ville n'est jamais descendue en-dessous des 10000 personnes.
4. Question subsidiaire pour départager les es-æquos : un syldave mesure 1m88, fume 1 paquet de Zrälùkz par jour : calculer le pourcentage de mots d'origine bordure dans la phrase « Czesztot wzryzkar nietz on waghabontz ! Czesztot bätczer yhzer kzömmetz noh dascz gendarmaskaïa »

Recherche 1 - 26

A Syldavian fleet hire company leases tanks to private armies on a yearly basis, with a percentage discount in the leasing charge proportional to the number of tanks leased.

1. How many tanks must the fleet hire company lease to a single private army to maximise income ?
2. How would your decision be affected if the fleet hire company wish to maximise profit ?

We will need to make certain assumption :

— the income I and the profit P depend only on the fleet size S ;

— the nominal lease charge is £200000 per tank and per year ;

— the fleet hire company has a special offer : the lease charge per tank is discounted by 1 per cent for each tank in the fleet, e.g. a fleet size of 20 tanks earns a 20 per cent discount ;

— each tank depreciates by £100000 each year.

Recherche 1 - 27

A quadratic function is defined by $f(x) = x^2 + kx + 9$, where k is a constant. It is given that the equation $f(x) = 0$ has two distinct real roots. Find the set of values that k can take.

For the case where $k = -4\sqrt{3}$,

1. express $f(x)$ in the form $a(x+a)^2+b$ stating the values of a and b, and hence wrire down the leats value taken by $f(x)$.
2. Solve the equation $f(x) = 0$ expressing your answer in the terms of surds, simplified as far as possible.

Recherche 1 - 28 Vitesse optimale sur une autoroute

On considère un modèle très simplifié d'autoroute. Les voitures roulent à vitesse constante sur une route droite et infinie. On appelle *débit stabilisé* le rapport entre la vitesse des voitures (constante) et la distance entre les deux pare-chocs avant de ces voitures (constante) :

$$D = \frac{v}{\ell}$$

Vérifiez que cela nous donne le nombre de voitures par unité de temps.
On a l'impression que plus on va vite, plus le débit augmente mais il faut tenir compte de la distance d'arrêt : plus on va vite, plus cette distance est longue ce qui est dangereux. Or la distance de freinage est proportionnelle à l'énergie de la voiture induite par sa vitesse et sa masse (c'est son énergie cinétique qui vaut $\frac{1}{2}mv^2$) et il faut lui ajouter la distance induite par le temps de réaction du conducteur qu'on supposera constant.
Il faut donc se placer à une distance de :

$$\ell = Kv^2 + t_0 v + L$$

avec K un certain coefficient de proportionnalité constant t_0 le temps de réaction constant et L la longueur des véhicules qu'on supposera constante.
Exprimez alors le débit en fonction de v et des paramètres.
Comment déterminer v pour avoir un débit maximum ?
Pour l'application numérique, on prendra une longueur de voiture de 4m. Pour calculer le coefficient K, on se reportera au tableau reproduit dans les manuels de code de la route :

Vitesse (km/h)	20	30	50	70	90	110	130
Distance de freinage (m)	2	5	14	28	46	68	95

Recherche 1 - 29 Projectile

Un projectile lancé depuis le sol est supposé avoir sa trajectoire dans un plan vertical. On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air. Cette trajectoire dépend alors de deux paramètres :

— sa vitesse initiale v_0

— l'angle de lancement par rapport à l'horizontale α

Le temps est exprimé en secondes, le lancement a lieu à l'instant 0. La hauteur à l'instant t est donnée par :

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha$$

1. On suppose que $v_0 = 100m.s^{-1}$. Calculez dans chacun des cas suivants le temps que mettra le projectile pour toucher le sol lorsque $\alpha \in \left\{\pi/6, \pi/4, \pi/3\right\}$.

   Pour quelle valeur de t la hauteur est-elle maximale ?

2. On veut atteindre un point situé à 1 km. Quel angle choisir avec toujours le même v_0 ?

3. Cas général ?

Recherche 1 - 30 Golden Ratio

Une énigme

Prenez deux cartes du lycée. Mettez-les côte à côte, l'une à gauche horizontalement et celle de droite verticalement. Placez un bout de feuille ou une règle le long de la diagonale de la carte de gauche qui monte vers la droite.

Que remarquez-vous ?

Quelles relations existe-t-il entre les longueurs des côtés des cartes ?

Cherchez... puis construisez une approche pratique et théorique en rapport avec le titre du chapitre ;-)

Des défis

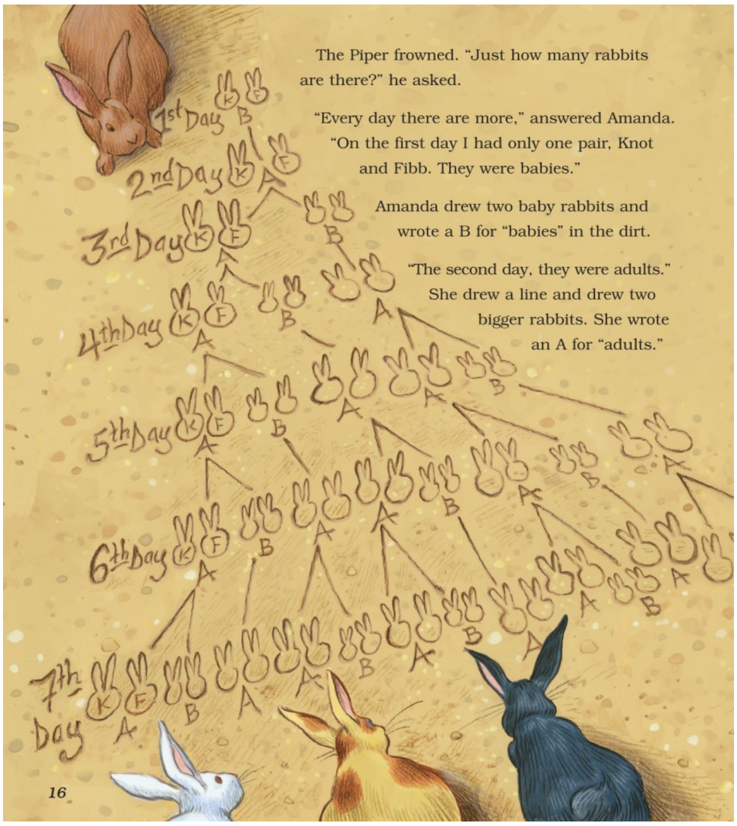
1. Calculez des approximations décimales de 1, $1+\frac{1}{1}$, $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$,...

   Quel rapport avec le problème précédent ?

2. Calculez des approximations décimales de 1, $\sqrt{1+1}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+1}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$,...

   Quel rapport avec le problème précédent ?

3. Et ces petits lapins :



4. Comment s’aider d’un langage de programmation ? Nous utiliserons cette année Python à travers l’appli *Pythonista* installée sur votre iPad.

THÈME Nº 2

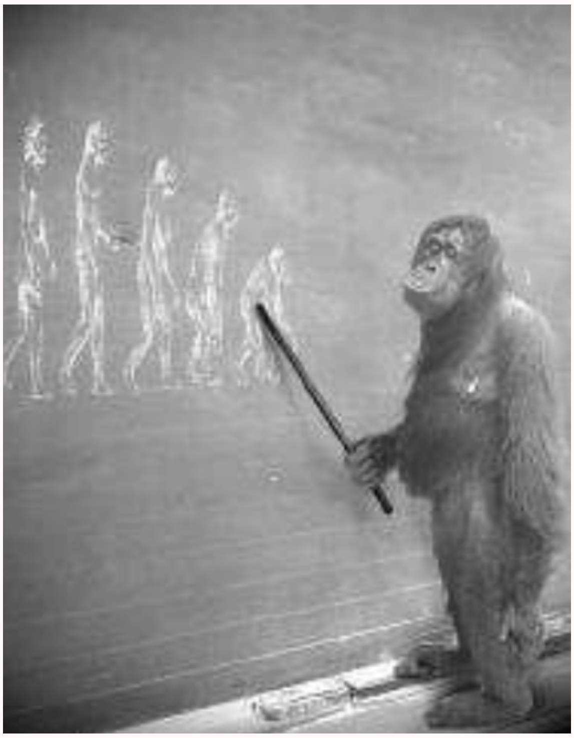
Géométrie analytique

1 50 shades of vector

Un vecteur pour certains c'est ça :

THÈME No 3

Suites : premiers pas



Découverte des suites en douceur à travers l'étude des suites arithmétiques et géométriques

1 Le programme

Dans de nombreux domaines, notamment l'économie ou les sciences sociales, on s'intéresse à l'évolution de phénomènes qui peuvent être modélisés par une suite. L'introduction de la notion de suite peut ainsi s'appuyer sur ces situations concrètes en exploitant largement, dans des registres différents, les activités algorithmiques et le tableur qui favorisent la compréhension de la notation indicielle.

Contenus

— Modes de génération d'une suite numérique.

— Suites arithmétiques et suites géométriques.

Capacités attendues

— Modéliser et étudier une situation à l'aide de suites.

— Mettre en œuvre des algorithmes permettant : d'obtenir une liste de termes d'une suite ; de calculer un terme de rang donné.

— Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison.

— Établir et connaître les formules donnant $1+2+\cdots+n$ et $1+q+q^2+\cdots+q^n$

2 Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

C'est une suite... de nombres dont chaque membre porte un dossard numéroté.
Par exemple l'ensemble des multiples entiers positifs de 10 classés par ordre croissant est une suite (numérique[a]).
On peut la décrire de diverses façons :

— à l'aide d'une phrase comme nous venons de le faire ;

— en décrivant l'ensemble de ses éléments : l'ensemble des réels x tels qu'il existe un entier naturel n vérifiant $x = 10n$;

— en donnant l'expression d'un terme quelconque de la suite en fonction de son rang (son« numéro de dossard »). Ici, le terme de rang k est $10k$, quelque soit l'entier naturel non nul k ;

— en exprimant comment on obtient un terme en fonction du précédent. Ici, un terme quelconque est égal au terme précédent plus 10, sachant que le premier vaut 0. On dit qu'on définit ainsi la suite par une relation de *récurrence* ;

— etc.

En fait, à chaque numéro de dossard correspond un seul nombre. On définit ainsi une fonction : une suite est en fait un cas particulier de fonction qui est définit sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des numéros de dossard, enfin des entiers naturels je veux dire.

Définition 3 - 1

suite numérique

Une suite (sous-entendue numérique) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou sur une partie seulement de $\mathbb{N}$.
Définir une suite, c'est donc associer un nombre réel à tout élément d'une partie de $\mathbb{N}$.

a. comme on n'étudiera que celles-ci, on écrira suite pour suite numérique par la suite

Dans notre exemple précédent, appelons d cette suite. Alors on peut écrire : $d\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 10n \end{array}$.

Ainsi, le multiple numéro 3 est $d(3) = 10 \times 3 = 30$

Idée

Notation usuelle Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
La suite d est de *terme général* d_n. Au lieu de d, on désigne aussi la suite par $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement (d_n).
On appelle d_n le *terme d'indice* n ou encore le *terme de rang* n.

Danger

Il ne faudra pas confondre le *nombre* d_n avec la *suite* (c'est-à-dire fonction) (d_n)...

Exemple

Décrivez la suite (p_n) des entiers naturels pairs.

3 Suite dont le terme général est donné explicitement

En fait, cela veut dire que l'on connaît l'expression de u_n en fonction de n et que l'on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite.

Définition 3 - 2

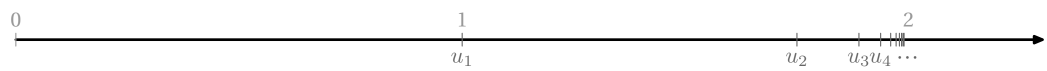
suite définie explicitement
Soit D une partie de $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur n. Soit u une suite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in D$. On dit alors que u est définie explicitement.

Exemple

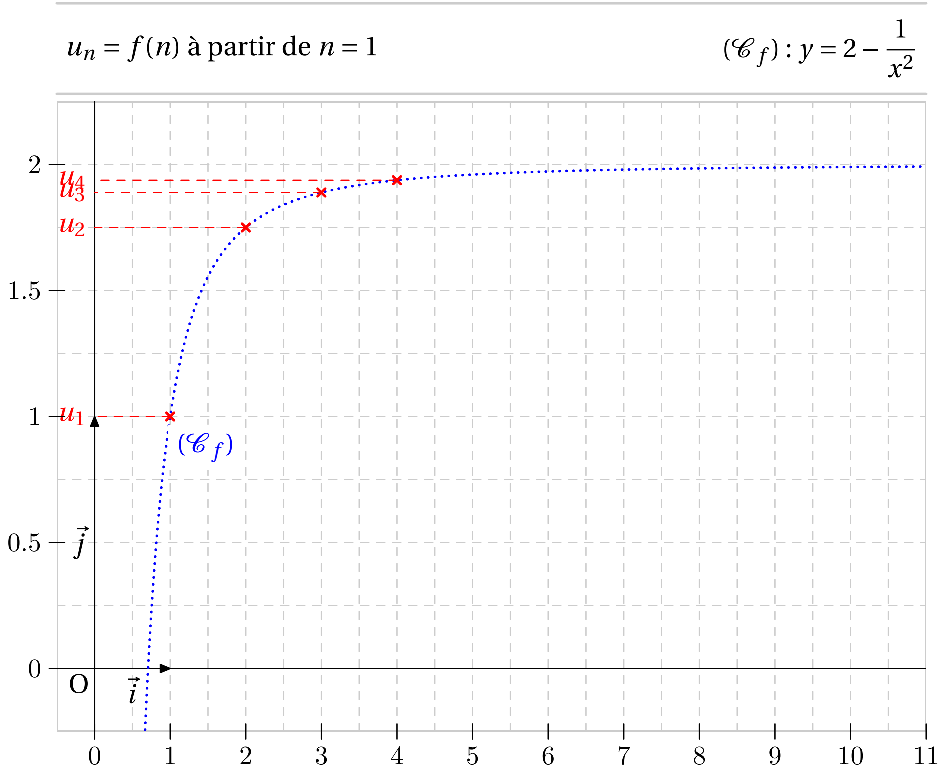
Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$.

On obtient par exemple $u_1 =$................, $u_2 =$.................., $u_{10} =$.........
....
On peut même tracer sa représentation graphique. On peut le faire

— sur un axe :



— dans un repère du plan :



Danger

La représentation graphique de la suite n'est constitué que par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses entières : il ne faut donc pas les relier mais laisser des petites croix isolées.

Rien de bien nouveau par rapport aux fonctions mais attendez la suite...

4 Suite définie par une relation de récurrence

Exemple

Il nous faut un point de départ : posons par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Ensuite, il nous faut un petit algorithme, comme dans les dessins de maternelle...
Disons ici que chaque terme est égal à la somme des deux précédents. Calculez les 10 premiers termes de la suite.

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 =$................, $u_3 =$................,$u_4 =$................,$u_5 =$ ....

$u_6 =$..................,$u_7 =$....................,$u_8 =$......................,$u_9 =$.......................

$u_{10} =$.......................
Pouvez-vous calculer le 137e terme de cette suite [b] ?

Définition 3 - 3

suite définie par une relation de récurrence
C'est une suite dont on connaît le(s) premier(s) terme(s) et dont un terme quelconque est défini en fonction des termes précédents.

b. Cette suite est célèbre et porte le nom de « suite de Fibonacci » du surnom du mathématicien italien Leonardo Pisano(1175 - 1250). Cette suite présente d'innombrables propriétés remarquables. Fibonacci l'avait utilisée pour décrire l'évolution d'une population de lapins immortels. Plus tard, un romancier américain opportuniste a fait fortune en en parlant dans un roman portant le nom d'un autre Leonardo...

Exemple

Soit s et t les suites définies par :

$$s\ :\ \begin{cases} s_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ s_n = 1 + \frac{1}{s_{n-1}} \end{cases} \qquad t\ :\ \begin{cases} t_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ t_n = \sqrt{1 + t_{n-1}} \end{cases}.$$

Calculez les valeurs approchées à 10^{-4} près des 10 premiers termes de chaque suite.

Idée

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice On commence par entrer le premier terme. Par exemple pour s :

[1] [EXE]

Ensuite, on utilise la touche [Ans] qui récupère le dernier résultat donné par la machine, c'est-à-dire ici 1 :

[1] [+] [1] [÷] [Ans] [EXE]

ensuite, on tape sur [EXE] pour obtenir les termes suivants.

Avec un logiciel programmable, on peut écrire ça :

```
s:=1; S:=s;
   pour k de 1 jusque 10 faire
          s:=1+1/s;
          S:=S,approx(s);
   fpour;
```

1, 1, 1, 2.000000, 1.500000, 1.666667, 1.600000, 1.625000, 1.615385, 1.619048, 1.617647, 1.618182, 1.617978

```
t:=1; T:=t;
   pour k de 1 jusque 10 faire
          t:=sqrt(1+t);
          T:=T,approx(t);
   fpour;
```

1, 1, 1, 1.414214, 1.553774, 1.598053, 1.611848, 1.616121, 1.617443, 1.617851, 1.617978, 1.618017, 1.618029

Il existe également des modes spécifiques pour étudier les suites définies par une relation de récurrence.

Sur les TI

On tape [mode] puis sur la quatrième ligne on sélectionne(Suit)

On va ensuite sur [$f(x)$]. On entre nMin=1, u(n)= [1] [+] [1] [÷] [2nde] [u_n] [(] [x,t,θ,n] [–] [1] [)]

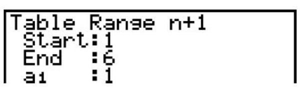
On va ensuite sur [table] ou sur [calculs] [entrer] et on choisit le rang désiré.

Sur les Casio

On va dans le menu RECUR.

Choisissez le mode correspondant au type de récurrence, ici [F2], puis la formule [1] [+] [1] [÷] [F4] [F2] (pour sélectionner a_n) puis [EXE].

Il reste à faire quelques réglages sur [F5] (RANG) :



et à demander la table [EXIT] [F6]

5 Suites arithmétiques

Nous n'allons étudier que deux cas très particuliers de suites définies par une relation de récurrence.
Le premier cas concerne les suites telles que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple

Votre mamie vous donne 2 euros 50 tous les ans le 25 décembre. Vous décidez de garder précieusement cet argent dans votre chaussette préférée en vous interdisant d'y toucher pendant les soixante-quinze ans à venir.
De quelle somme disposerez-vous après n années ?

Notons C_1 votre capital après un noël et plus généralement C_n votre capital après n noëls.
On a $C_1 = 2,5$ puis $C_2 = 5$, $C_3 = 7,5$, etc.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$C_n = 2,5 \times n$$

Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de sommes d'argent qui est en fait une suite numérique de *terme général* $C_n = 2,5n$. C'est un cas particulier qui nous intéresse :

Définition 3 - 4

suite arithmétique
Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

Dans l'exemple 3.5, si on appelle C_n le capital constitué après n années, $C_{n+1} = C_n + 2,5$ avec $C_0 = 0$: la suite (C_n) est donc une suite arithmétique de raison .... et de premier terme ....

Idée

Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ? Par exemple, considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 1$.
Calculons les premiers termes : $u_0 = \ldots$, $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots$.
Calculons $u_1 - u_0 = \ldots$ et $u_2 - u_1 = \ldots$. Que pouvons-nous en conclure ?

5 1 Expression explicite du terme général

Observons les premiers termes d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme a_0 et de raison r :

$$\begin{aligned}
a_0 &= & a_0 &= a_0 + 0 \cdot r \\
a_1 &= & a_0 + r &= a_0 + 1 \cdot r \\
a_2 &= & a_1 + r = (a_0 + r) + r &= a_0 + 2 \cdot r \\
a_3 &= & a_2 + r = (a_0 + 2r) + r &= a_0 + 3 \cdot r \\
a_4 &= & a_3 + r = (a_0 + 3r) + r &= a_0 + 4 \cdot r \\
a_5 &= & a_4 + r = (a_0 + 4r) + r &= a_0 + 5 \cdot r
\end{aligned}$$

Il semble se dégager que pour n'importe quel entier naturel n, on ait $a_n = a_0 + n \cdot r$
Vérifions que la suite de terme général $u_n = a_0 + n \cdot r$ est bien la suite (a_n) :

— son premier terme est $a_0 + 0 \cdot r = a_0$;
— étudions la différence de deux termes consécutifs quelconques. Soit p un entier quelconque. Calculons $u_{p+1} - u_p$.
$u_{p+1} - u_p = a_0 + (p+1)r - (a_0 + nr) =$

Conclusion :

Théorème 3 - 1

expression explicite du terme général d'une suite arithmétique
Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme a_0 et de raison r si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

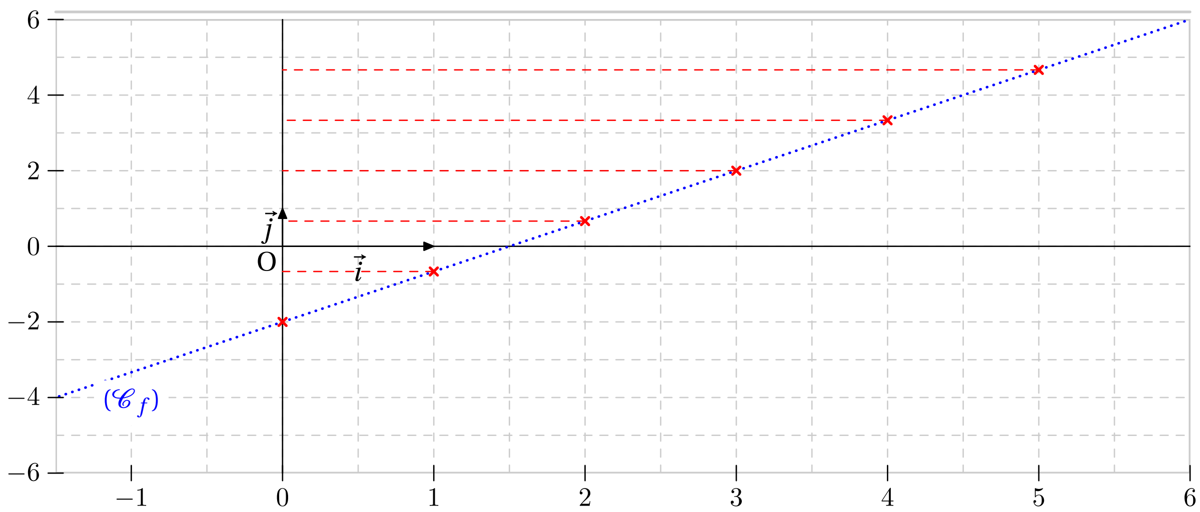
Idée

Expression du terme général en fonction d'un autre terme que celui de rang 0 Soit p un entier supérieur à un entier m.
$a_p = a_0 + p \cdot r$ et $a_m = a_0 + m \cdot r$. Alors $a_p - a_m = \ldots$
On obtient donc que $\boxed{a_p = a_n + (p-n)r}$

5 2 Représentation graphique

Avec les mêmes notations, $a_n = a_0 + n \cdot r = f(n)$ avec $f : x \mapsto a_0 + r \cdot x$. La fonction f est donc une fonction affine : sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur r.

Suite arithmétique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme -2



Théorème 3 - 2

représentation graphique d'une suite arithmétique
Les points correspondant aux termes d'une suite arithmétique sont donc alignés sur une droite de coefficient directeur la raison et d'ordonnée à l'origine le premier terme.

5 3 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

5 3 1 Somme des n premiers entiers naturels

On veut calculer $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. La démonstration suivante a été donnée par le jeune Friedrich GAUSS à l'âge de 7 ans :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
S_n = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

Conclusion $2S_n = \ldots$ et donc :

Théorème 3 - 3

somme des n premiers entiers naturels

La somme des entiers de 1 à n, notée $\sum_{k=1}^{n} k$, est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$

5 3 2 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Avec les notations habituelles, nous voulons calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

$T_n = a_0 + a_0 + r + a_0 + 2r + a_0 + 3r + \cdots + a_0 + nr$

Combien de fois apparaît a_0 dans la somme ?

On peut d'autre part factoriser par r.

Théorème 3 - 4

somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Étant donné une suite arithmétique a de raison r

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme+dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(a_0+a_n)}{2}$$

6 Suites géométriques

Nous irons plus vite ici : les preuves seront faites en exercices...

6 1 Définition

Définition 3 - 5

suite gémétrique

Une suite (g_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_{n+1} = q \cdot g_n$$

On appelle q la raison de la suite.

6 2 Expression explicite du terme général

Théorème 3 - 5

expression explicite du terme général d'une suite géométrique

Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme g_0 et de raison q si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$g_n = g_0 \cdot q^n$$

6 3 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Théorème 3 - 6

somme des premiers termes d'une suite géométrique

Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} g_k = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = g_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercices

Légende

- Objectif : Devoir commun - SAT Practice Test
  - connaître les définitions des suites arithmétiques et géométriques ;
  - savoir calculer un terme connaissant raison et un autre terme ;
  - savoir calculer la raison connaissant plusieurs termes ;
  - savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
  - maîtriser le symbolisme des suites : notation avec indice, symbole sigma.
- Objectif : Bac
  - modéliser une situation pour aboutir à une suite arithmétique ou géométrique ;
  - étudier certaines suites en utilisant une suite arithmétique ou géométrique auxiliaire introduite par l'énoncé ;
  - résoudre des problèmes liés aux suites en mettant en œuvre des outils algébriques moyennement complexes ;
  - savoir utiliser sa calculatrice ;
  - mettre au point ou savoir exécuter des algorithmes de calcul de termes de suites.
- Objectif : Post Bac
  - résoudre des problèmes liés aux suites en mettant en œuvre des outils algébriques complexes ;
  - faire preuve d'initiative ;
  - avoir de l'imagination ;
  - réfléchir seul(e) ;
  - chercher, se tromper, recommencer, laisser reposer et reprendre plus tard ;
  - ne pas avoir peur de l'inconnu ;
  - aborder un problème inconnu en essayant de se ramener à un problème connu.

Les énoncés

Recherche 3 - 1

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_4 = 30$.

1. Calculer u_0.
2. Calculer u_9.
3. Calculer la somme S_{10} des 10 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Recherche 3 - 2

Démontrez qu'il existe une suite arithmétique et une seule telle que les termes d'indice 10 et 19 soient 15 et 42.

Recherche 3 - 3

Une usine d'armement fabrique des prothèses de cerveaux.
La machine fonctionne 7 jours sur 7 durant le mois de juin. La production est de 2 500 cerveaux le 31 mai.
À partir du 1er juin, la production augmente de 50 cerveaux par jour.
Pour un client, on stocke la production du 11 juin au 24 juin inclus.
On nomme u_n la production le jour n du mois de juin.

1. Établir la formule donnant u_n en fonction de n et calculer la production du 24 juin.

2. Calculer le nombre de cerveaux stockés pour le client.

Recherche 3 - 4

$(V_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique telle que $V_5 = 7$ et $V_9 = 1$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.
2. Donner son terme général.
3. Calculer $S = V_{53} + V_{54} + V_{55} + \cdots + V_{100}$.

Recherche 3 - 5

Soit la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $U_n = 2n + 7$.

1. La suite (U_n) est-elle arithmétique ?
2. Calculer U_{100}.
3. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{99} + U_{100}$.

Recherche 3 - 6

La suite géométrique (u_n) est définie par les termes $u_3 = 2.4$ et $u_{10} = 307.2$. Déterminer la raison q, le premier terme u_0 et l'expression de u_n en fonction de n.

Recherche 3 - 7 **SAT Practice Test**

The bacteria population in a day-old wad of chewing gum doubles every 3 hours. If there are 100 bacteria at 12 :00 noon on Friday, how many bacteria will be present at midnight of the same day ?

1. 200
2. 300
3. 800
4. 1600

Recherche 3 - 8 **SAT Practice Test**

Author A, an extraordinarily fast writer who zips through a chapter a day, gets paid \$100 for her first chapter, \$200 for her second, \$300 for her third, and so on. Author B, also a member of the chapter-a-day club, gets paid \$1 for his first chapter, \$2 for his second, \$4 for his third, \$8 for his fourth, and so on. On the 12th day,

1. Author A is paid \$76 more.
2. Author B is paid \$24 more.
3. Author A is paid \$1,178 more.
4. Author B is paid \$848 more.

Recherche 3 - 9

Bernard Crazyoff dispose de 50 000 000 qu'il place à intérêts composés[c] au taux annuel de 6%. On note K_0 le capital de départ et K_n la somme dont disposera Bernard au bout de n années de placement.

1. Calculer K_1 et K_2.
2. Exprimer K_{n+1} en fonction de K_n.
3. Quelle est la nature de la suite (K_n) ?
4. En déduire l'expression de K_n en fonction de n.
5. De quelle somme disposera-t-il s'il laisse son argent placé pendant 10 ans sans krach financier ?

Recherche 3 - 10 **AS Maths**

For each of the following sequences, find an inductive definition and a formula.

c. Les intérêts sont dits « composés » lorsqu'à la fin de chaque année les intérêts produits sont ajoutés au capital. Ils produisent alors aux-mêmes des intérêts au cours des années suivantes.

1. 1, 5, 9, 13,... **2.** 1,-2,4,-8,16,... **3.** 16000,4000,1000,250,... **4.** 1,8,27,64,...

Recherche 3 - 11 AS Maths

Write out each of the following fully and find its value.

1. $\sum_{k=1}^{5} k^2$ **2.** $\sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$ **3.** $\sum_{k=3}^{7} (k-2)^2$ **4.** $\sum_{k=0}^{4} (5k+2)$

Recherche 3 - 12 AS Maths

Use the Σ notation to abbreviate (but not evaluate) each of the following.

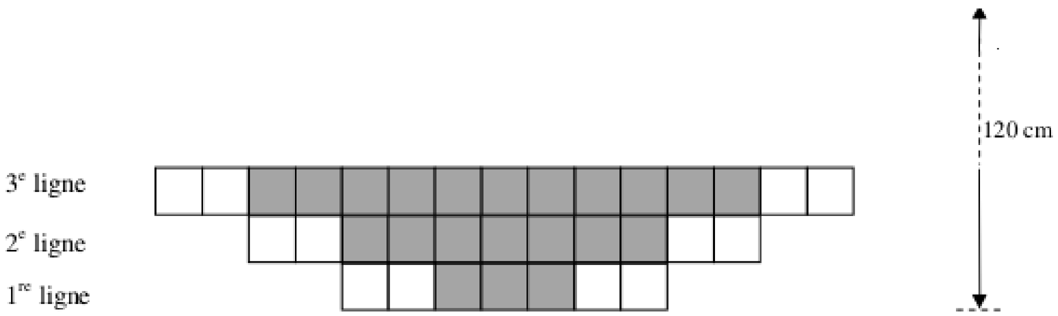
1. $1+4+9+16+\cdots+625$

2. $(1\times 2)+(2\times 3)+(3\times 4)+\cdots+(15\times 16)$

3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$

Recherche 3 - 13 Bac Pro B3 2013

On réalise un motif n carreaux gris et blancs pour décorer une salle de bains. La hauteur du motif est 120 cm. On néglige l'épaisseur des joints. Les carreaux gris sont commercialisés en boîte de 10 carreaux de dimension 5×5 (en centimètres).
On a représenté ci-dessous les trois premières lignes du motif à réaliser.



L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de boîtes de carreaux gris nécessaires pour réaliser le motif.
On note u_1 le nombre de carreaux gris de la première ligne, u_2 le nombre de carreaux gris de la deuxième ligne, etc.

1. Montrer que le suite (u_n) formée par le nombre de carreaux gris de chaque ligne est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

2. Calculer le nombre de carreaux gris utilisés pour réaliser la dernière ligne du motif.

3. Calculer le nombre minimum de boîtes de carreaux gris nécessaires pour réaliser le motif.

Recherche 3 - 14 Cheers

n camarades se retrouvent pour travailler sur de nouveaux problèmes mathématiques en buvant de l'hydromel et, comme de coutume, frappent avec leur verre ceux des autres buveurs. Combien de « Tchin » entend-on ?

Recherche 3 - 15 Ni l'un ni l'autre

Soit (u_n) la suite défiie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n)$. On pose $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2. Calculer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
3. Calculez u_{100}.

Recherche 3 - 16

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \text{ donné.} \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

1. Que peut-on dire de (u_n) si $u_0 = 3$?
2. Dans la suite de l'exercice, on choisit $u_0 = 2$.
   i. Calculer u_1 et u_2.
   ii. (u_n) est elle une suite arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite (z_n) définie pour tout n entier naturel par : $z_n = u_n - 3$
   i. Calculer z_0, z_1 et z_2.
   ii. Montrer que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.
   iii. Exprimer z_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{24}.

Recherche 3 - 17

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - n + 5$.

1. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Calculer la somme des $n + 1$ premiers termes de cette suite en fonction de n.

Recherche 3 - 18 BAC 1L 2012

Le tableau ci-dessous regroupe des estimations de la population mondiale données par l'ONU (Organisation des Nations Unies).

Année	Population mondiale (en milliards d'habitants)
1965	3,34
1970	3,70
1975	4,07
1980	4,44
1985	4,84
1990	5,28
1995	5,69
2000	6,09
2005	6,50
2010	6,84

Partie 1 - Étude préliminaire

1. Quel est le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre 1965 et 1970 ? Arrondir le résultat à 0,1 %.

2. En considérant que la population mondiale a augmenté de 10,8 % entre 1960 et 1965, calculer la population mondiale en 1960. Arrondir le résultat à $0,01$ milliard d'habitants.

Partie 2 - Modélisation à l'aide d'une suite géométrique

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3,34$ et de raison
$q = 1,108$.

1. Donner des valeurs approchées de u_1 et u_2 à $0,01$ près.
2. Exprimer u_n en fonction de l'entier n.
3. On utilise la suite (u_n) pour modéliser la population mondiale en considérant que, pour n un entier naturel, u_n correspond à la population mondiale en milliards d'habitants en $1965 + 5n$.
   i. Calculer u_9. Que représente cette valeur ?
   ii. Cette modélisation vous paraît-elle acceptable ?

Partie 3 - Modélisation à l'aide d'une suite arithmétique

On considère la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = 3,34$ et de raison
$r = 0,37$.
On utilise cette suite pour modéliser la population mondiale en considérant que pour n un entier naturel, v_n correspond à la population mondiale en milliards d'habitants en $1965 + 5n$.

1. Calculer v_9. À quelle valeur du tableau doit-on comparer cette valeur pour tester la validité de cette nouvelle modélisation ?
2. À l'aide de cette suite, quelle population peut-on prévoir en 2030 ?

Recherche 3 - 19 **BAC 1L 2012**

Une personne souhaitant acheter une voiture s'engage dans un prêt bancaire. Elle emprunte pour cela au premier mars 2011 un capital C de 10000 euros auprès de sa banque. Le tableau ci-dessous permet de visualiser le capital restant dû par cette personne au début de chaque mois ; il tient compte à la fois de la somme empruntée (ici, 10000 euros), de la mensualité et du taux d'emprunt bancaire. Un tel tableau s'appelle un tableau de remboursement. Nous n'avons représenté ici que les sommes restant dues jusqu'au premier juillet 2011.
Toutes les sommes sont exprimées en euros et arrondies au centime le plus proche.

Dates	Capital restant dû (en euros)
1 mars 2011	10000
1 avril 2011	9700
1 mai 2011	9397
1 juin 2011	9090,97
1 juillet 2011	8781,88

Ainsi, au premier mars 2011, l'emprunteur doit la somme de 10000 euros : c'est celle qu'il a empruntée.
Au premier avril 2011, après un premier versement, il lui reste à payer 9700 euros pour rembourser totalement son crédit. Au premier mai 2011, cette somme n'est plus que de 9397 euros, et ainsi de suite.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite des capitaux restant dus au cours du temps. Pour cela, nous notons u_n le capital restant dû au mois n, avec pour convention que le mois de mars 2011 est le mois 0.
Avec cette convention d'écriture, nous avons donc :
$u_0 = 10000$, $u_1 = 9700$, $u_2 = 9397$, etc.

Dans tout cet exercice, les résultats des calculs seront arrondis au centième.

Partie 1

Dans cette partie, nous évaluons la pertinence de modéliser la suite (u_n) par une suite arithmétique.

1. Dans le tableau 1 fourni dans l'annexe 1, quelle formule faut-il saisir dans la cellule D3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes jusqu'à la cellule D6 ?
2. Compléter les cellules D3 à D6 de ce tableau. (arrondir à $0,01$ près)
3. La suite semble-t-elle arithmétique ? Justifiez votre réponse.

Partie 2

Nous envisageons maintenant une modélisation géométrique de la suite (u_n).

1. Dans le tableau 1 fourni dans l'annexe 1, quelle formule faut-il saisir dans la cellule E3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes jusqu'à la cellule E6 ?
2. Compléter les cellules E3 à E6 de ce tableau (arrondir à $0,01$ près).
3. Quel type de progression la suite (u_n) semble-t-elle suivre ? Justifiez votre réponse.
4. On note (v_n) la suite géométrique de raison $0,97$ et de premier terme 10000.

   Dans le tableau 1 de l'annexe 1, quelle formule faut-il saisir dans la cellule F3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes jusqu'à la cellule F14 ? Compléter dans ce tableau les cellules F4 à F6.
5. Pour n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n.
6. Au premier mars 2012, le capital restant dû s'élèvera à 6195,25 euros. La modélisation géométrique de la suite (u_n) vous parait-elle convenir ?

Partie 3

Dans cette dernière partie de l'exercice 1, nous envisageons un autre modèle, dit arithmético-géométrique. Pour n entier naturel, on pose $w_n = u_n - 40000$.

1. Quelle formule faut-il écrire dans la cellule D2 du tableau 2 de l'annexe 2, pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes de la cellule D2 jusqu'à la cellule D6 ?
2. Compléter dans ce tableau les cellules D3 à D6.
3. Compléter dans ce tableau les cellules E3 à E6 (on arrondira à $0,01$ près).
4. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite (w_n) ? Donner des arguments appuyant cette conjecture.
5. On suppose que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,01.
   - i. Pour n entier naturel, exprimer w_n en fonction de n.
   - ii. Pour n entier naturel, déduire de l'égalité $w_n = u_n - 40000$ et de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n.
   - iii. Quand le prêt arrivera-t-il à échéance ? Combien de mensualités aura versé l'emprunteur ?

Annexes 1 et 2 - À rendre avec la copie

A	B	C	D	E	F
1	n Indice mois	u_n	$u_n - u_{n-1}$	$\frac{u_n}{u_{n-1}}$	v_n
2	0	10000			10000
3	1	9700	−300	0,97	9700
4	2	9397			
5	3	9090,97			
6	4	8781,88			
7	5				
8	6				
9	7				
10	8				
11	9				
12	10				
13	11				
14	12	6195,25			

Tableau 1

A	B	C	D	E
1	n Indice du mois	u_n	$w_n = u_n - 4000$	$\frac{w_n}{w_{n-1}}$
2	0	10000	−30000	
3	1	9700		
4	2	9397		
5	3	9090,97		
6	4	8781,88		
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12	6195,25		

Tableau 2

Recherche 3 - 20 **Cambrige AS level 2010**

The ninth term of an arithmetic progression is 22 and the sum of the first 4 terms is 49.

1. Find the first term of the progression and the common difference.
2. The nth term of the progression is 46. Find the value of n.

Recherche 3 - 21 **Cambridge AS level 2012**

The first term of an arithmetic progressin is 61 and the second term is 57. The sum of the first n terms is n. Find the value of the positive integer n.

Recherche 3 - 22 **Cambridge AS level 2013**

In an arithmetic progression the sum of the first ten terms is 400 and the sum of the next ten terms is 1000. Find the common difference and the first term.

Recherche 3 - 23 **Cambridge AS level 2014**

An arithmetic progression has a first term 7. The nth term is 84 and the $(3n)$th term is 245. Find the value of n.

Recherche 3 - 24

Imaginez des énoncez d'exercices similaires à la série anglaise mais concernant les suites géométriques.

Recherche 3 - 25 **Tercero de la ESO (3e espagnole)**

Hallar el número de términos y la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 4, el último 62500 y la suma de todos sus términos 78124.

Recherche 3 - 26 **Tercero de la ESO**

Halla la suma de los siete primeros términos de la progresión cuyos tres primeros términos son :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Recherche 3 - 27 **Tercero de la ESO**

La suma de los 5 términos que forman una progresión geométrica es $(b^2+1)(b+1)$ y la razón es b. ¿Cuánto vale el primer término ?

Recherche 3 - 28 **Tercero de la ESO**

En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero y el producto de todos ellos es igual a $4\sqrt{2}$. Hallar todos los términos de la progresión.

Recherche 3 - 29 **Tercero de la ESO**

En una bodega hay dos enormes depósitos de vino A y B. Todos los días se sacan ciertas cantidades de vino de cada uno de los depósitos. Del depósito A se extrajeron 5 litros el primer día, 10 el segundo, 20 el tercero y así sucesivamente. Del depósito B se extrajeron 2 litros el primer día, 4 el segundo, 8 el tercero y así sucesivamente. El último día se extrajeron del depósito A 96 litros más que del depósito B. ¿Cuántos litros de vino se extrajeron en total de cada depósito y durante cuántos días ?

Recherche 3 - 30 **Tercero de la ESO**

Radio Macuto : A las 9 de la mañana una persona cuenta un secreto a tres amigos con la condición de que no se lo cuenten absolutamente a nadie. A las 9'30 horas de la mañana cada uno de esos tres amigos se lo ha contado a otros tres con la misma condición. A las 10 de la mañana cada uno de estos amigos se lo ha contado a otros tres y así sucesivamente cada media hora. Suponiendo que se ha tenido la inmensa suerte de que a nadie se lo han contado por dos vías diferentes, ¿cuánta gente estaría enterada del secreto a las 4 de la tarde ?

Recherche 3 - 31 **Tercero de la ESO**

Demostrar que si los números a, b y c están en progresión geométrica, entonces la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales y que la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$ tiene una raíz real doble.

Recherche 3 - 32 **Bac S 2012**

1. On considère l'algorithme suivant :
   Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Fin pour
Sortie
Afficher U

   Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
   Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
4. Soit p un entier naturel non nul.
   Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Recherche 3 - 33 **Bac S 2013**

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = 1 \\ v_{n+1} & = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1
Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

Algorithme N° 2
Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur 1
Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Fin algorithme

Algorithme N° 3
Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

i. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

ii. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

Recherche 3 - 34 — Bac S Londres 2012

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Recherche 3 - 35 **Bac ES 2016**

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 février 2016.
On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5700$.
Les résultats seront donnés sous forme approchée à 0, 01 près si nécessaire.

1. i. Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5485,50 euros.
   ii. Calculer u_2.
2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4500$ faire
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

i. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5700	⋯	
Valeur de n	0	⋯	
$u > 4500$ (vrai ou faux)	vrai	⋯	faux
…			

ii. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20000$.

i. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

ii. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 20000 - 14300 \times 1,015^n$.

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

i. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2121,68 euros.

ii. Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

iii. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

iv. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

Recherche 3 - 36 — Bac ES 2016

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015 + n$.
On a donc $u_0 = 10000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$.

2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - 12000.$$

i. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

ii. Exprimer v_n en fonction de n.

iii. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n$.

iv. Que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.

i. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que ...
	N prend la valeur ...
	U prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

ii. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

Recherche 3 - 37 **Cuarto de la ESO (2nde)**

Comprueba que, en una progresión geométrica con un número impar de términos, n, donde a_c es el término central, la suma de los términos se puede hallar mediante la fórmula

$$S_n = a_c \times \frac{r^n - 1}{r^{\frac{n-1}{2}} \times (r-1)}$$

Recherche 3 - 38 **Cuarto de la ESO (2nde)**

Si los cuatro primeros términos de una progresión geométrica son 1, 3, 9 y 27, comprueba que el producto de los n primeros términos es igual a $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

Recherche 3 - 39 **1ère russe...**

Показать, что

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{a_1a_{n+1}}$$

где $a_1, a_2, \dots a_{n+1}, \dots$ ненулевые члены арифметической прогрессии.
Quelle est la question ? Quelle est la réponse ?
Simplifiez alors l'expression suivante, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étant encore arithmétique

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

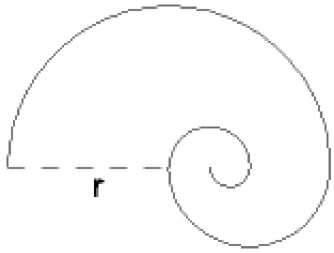
Recherche 3 - 40 **1ère russe**

Пусть S_n, S_{2n} и S_{3n} - соответственно суммы первых n, $2n$ и $3n$ членов геометрической прогрессии. Доказать равенство

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

Recherche 3 - 41 **Abitur**

An einen Halbkreis mit dem Radius r wird ein halb so großer Halbkreis angefügt, daran wieder ein halb so großer usw., so dass eine Spirale entsteht (Bild).



1. Berechne den Grenzwert der Länge der Spirale.
2. Wie weit ist das Zentrum der Spirale von ihrem Anfangspunkt entfernt ?

Recherche 3 - 42 **Flocon de Von Koch**

On part d'un triangle équilatéral T_0 de côté a. Chacun des côtés de ce triangle est également partagé en trois segments de mêmes longueurs.
Pour chacun des côtés, le tiers central est remplacé par les deux côtés d'un triangle équilatéral extérieur à T_0 et dont le troisiéme côté serait le tiers manquant. On obtient un polygone T_1.
On construit de la même manière T_2, T_3, etc.

1. Calculez les périmètres p_0, p_1, etc. de ces polygones. Quelle relation existe-t-il entre p_{n+1} et p_n ?
2. Prenons $a = 1$. Donner le plus petit entier n tel que $p - n \geqslant 3000000$.
3. Que pensez-vous de l'aire de ces polygones ?

Recherche 3 - 43 **Tours de Hanoï**

L'été dernier, lors de la visite d'un musée, j'ai, pour une fois, impressionné mes enfants en résolvant devant eux très rapidement le problème suivant :

Ce casse-tête a été posé par le mathématicien français Édouard LUCAS en 1883.
Le jeu consiste en une plaquette de bois où sont plantés trois piquets. Au début du jeu, 4 disques de diamètres croissant de bas en haut sont placés sur le piquet de gauche. Le but du jeu est de mettre ces disques dans le même ordre sur le piquet de droite en respectant les règles suivantes :

— on ne déplace qu'un disque à la fois ;

— on ne peut poser un disque que sur un disque de diamètre supérieur.

Je vous propose donc de jouer vous aussi avec moi... Essayez d'abord avec 2 puis 3 disques. Et après ?
Les choses se compliquent. Il est temps de parler de la légende rapportée par LUCAS dans ses « *récréations mathématiques* » :

> *N. Claus de Siam a vu, dans ses voyages pour la publication des écrits de l'illustre Fer-Fer-Tam-Tam, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée du Brahmâ. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes !*

C'est un problème posé par un mathématicien mais nous allons l'étudier en *informathicien*. Nous voudrions répondre à plusieurs questions :

— peut-on résoudre le problème des 64 disques ?

— si oui, en combien de mouvements ?

— peut-on trouver une tactique la plus efficace possible ?

— est-ce que la fin du monde est pour bientôt ?

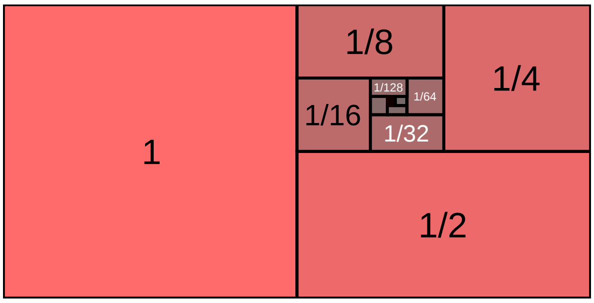
Au lieu d'étudier des cas séparés, nous allons généraliser un peu et considérer une tour avec n disques, n étant un entier naturel non nul.
Notons M_n le nombre minimum de mouvements pour transférer n disques. Pouvez-vous donner les premières valeurs de M_n ?
En fait, j'ai vu que je savais bouger deux disques d'un piquet vers un autre. Cela me demande trois étapes qui se cachent derrière le « *je mets les deux petits sur celui du milieu* ».
Cela nous donne en fait la solution : avec $n+1$ disques, je bouge les n plus petits sur le piquet du milieu (M_n mouvements), je bouge le plus grand sur le piquet d'arrivée (1 mouvement) puis je redéplace les n petits sur le grand (M_n mouvements). Ainsi :

$$M_{n+1} \leqslant 2M_n + 1$$

Pourquoi avoir utilisé $\leqslant$ et non pas $=$?
Peut-on faire mieux que la solution proposée ?
Et la fin du monde dans tout ça ? Pour connaître M_{64}, il semblerait qu'il faille connaître tous les M_k précédents.
Voyons voir, calculez jusqu'à M_6.
Qu'en pensez-vous ?

Recherche 3 - 44 **Énigme**

Que vous inspire ce dessin :



Recherche 3 - 45 **Suites arithmético-géométriques**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$, a et b étant des paramètres réels fixes. Essayez d'exprimer u_n en fonction de n, a, b et u_0.

Recherche 3 - 46 **Bac S 2016**

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°\mathrm{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°\mathrm{C}$.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à $85\,°\mathrm{C}$.
Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Recherche 3 - 47 **Bac S 2016**

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de $20\,\%$ en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **i.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.

ii. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

iii. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

i. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

ii. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

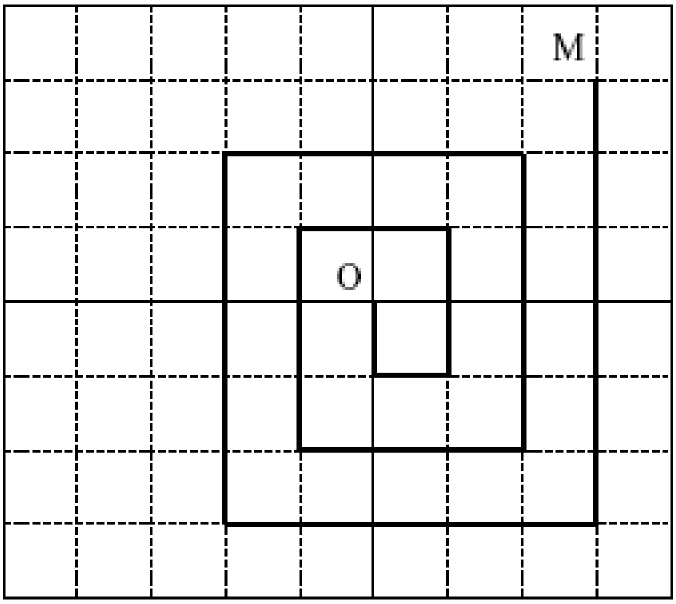
Recherche 3 - 48 Plan de remboursement d'un emprunt

Lorsqu'on emprunte de l'argent à mensualités constantes, un plan de remboursement indique, suivant le capital emprunté C, le taux d'intérêt mensuel t et le montant des remboursements M, le capital R_n, en £ restant dû au bout de n mensualités.

1. Établir une relation de récurrence définissant R_{n+1} en fonction de t, R_n et M.
2. Quelle est la nature de la suite (R_n) ?
3. En déduire l'expression de R_n en fonction de C, M, n et t.
4. On veut complètement rembourser l'emprunt au bout de N mensualités. Déterminer N en fonction de M, t et C.
5. Joe Max voit une publicité sur son iPad : « Empruntez £3000 à un taux de 0,5% mensuel et ne remboursez que £50 par mois, vive le crédit, vivre c'est consommer ». Il se demande alors , s'il fait cet emprunt, au bout de combien de temps aura-t-il fini de le rembourser ? Qu'en pensez-vous ?
6. Maintenant, Joe Max veut rembourser sur deux ans ces £3000. Quel sera le montant de ses mensualités ?

Recherche 3 - 49 Olympiades académiques...plutôt costaud !

Le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé de droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage, on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.

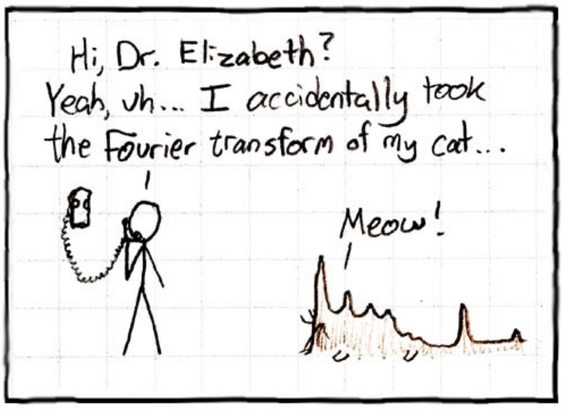


Pour tout point M à coordonnées entières, on note $ell(M)$
la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O au point M.

1. Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$. Déterminer les valeurs possibles de $\ell(A)$.
2. Soit B le point de coordonnées $(2005; 2006)$. Déterminer $\ell(B)$.
3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\ell(C) = 2006$.
4. La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

THÈME No 6

Trigonométrie



La trigonométrie est une des parties les plus anciennes des mathématiques, il y a plus de 4000 ans. Mais c'est aussi la branche des mathématiques dont les applications sont les plus nombreuses. On ne peut y échapper car on la retrouve dans l'acoustique, l'architecture, l'astronomie (et ainsi la navigation, sur les océans, dans les airs et dans l'espace), la biologie, la cartographie, la chimie, le génie civil, l'infographie, la géophysique, la cristallographie, les sciences économiques (en particulier dans l'étude des marchés financiers), l'électrotechnique, l'électronique, la topographie et la géodésie, beaucoup de sciences physiques, la construction mécanique, l'imagerie médicale (tomographie axiale calculée et ultrasons), la météorologie, la théorie de la musique, la théorie des nombres (et par conséquent la cryptographie), l'océanographie, l'optique, la pharmacologie, la phonétique, la théorie des probabilités, la psychologie, la séismologie, les statistiques, et la perception visuelle...

1 Le programme officiel

La trigonométrie, et en particulier l'étude des fonctions cosinus et sinus, est primordiale dans pratiquement tous les domaines de la science...c'est pourquoi, en toute logique, c'est une des branches les plus martyrisée par le nouveau programme !
Bref, il faut connaître :

— le cercle trigonométrique, notamment pour déterminer cosinus et sinus d'angles associés, résoudre des équations de type $\cos x = \cos a$.

— le radian

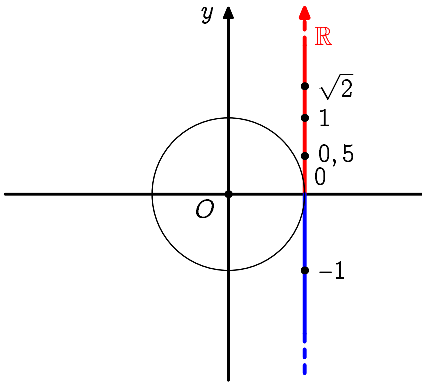
— la mesure d'un angle orienté

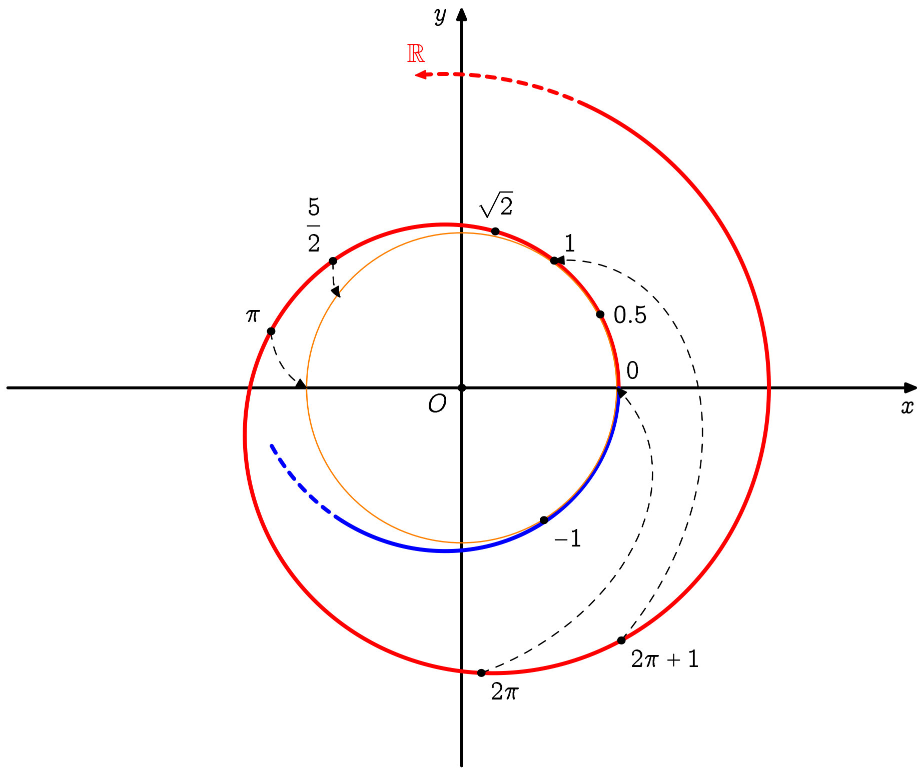
C'est un peu peu, surtout si on pense à ce qui se fait dans les autres pays...

2 Promenons-nous sur le cercle

2 1 Enroulons la droite des réels

Pour aller se promener, il est peu pratique d'emmener la droite des réels telle quelle : elle prend trop de place. C'est pourquoi nous allons l'enrouler autour d'un cercle, mais comment faire ?
On considère un cercle de rayon 1 et de centre le centre du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On « colle » l'origine de la droite des réels sur le point I de coordonnées $(1\,;\,0)$, et on enroule. Enfin, on imagine, car il va être difficile de trouver le « bout » de la droite correspondant à $-\infty$...Sans compter qu'il va nous falloir pas mal de temps avant d'avoir fini de l'enrouler, mais ceci est un autre problème...



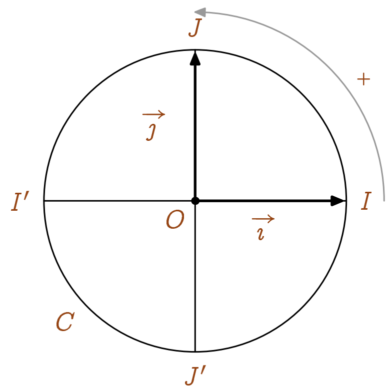


Comme vous le savez bien, le périmètre du cercle unité vaut $2 \times \pi \times \text{rayon} = 2\pi$ puisque le rayon vaut 1.
Donc, le point d'abscisse 2π de la droite des réels vient se « coller » sur 0, le point d'abscisse $2\pi + 1$ de la droite des réels vient se « coller » sur 1 et plus généralement, tout point d'abscisse x voit se coller sur lui $x + 2\pi$, $x - 2\pi$, $x + 2 \times 2\pi$, $x + 3 \times 2\pi$, ...
Nous pouvons de plus observer que nous allons ainsi associer à chaque élément de la droite des réels, donc à chaque nombre réel x, un unique point sur le cercle.

2 2 Cercle trigonométrique

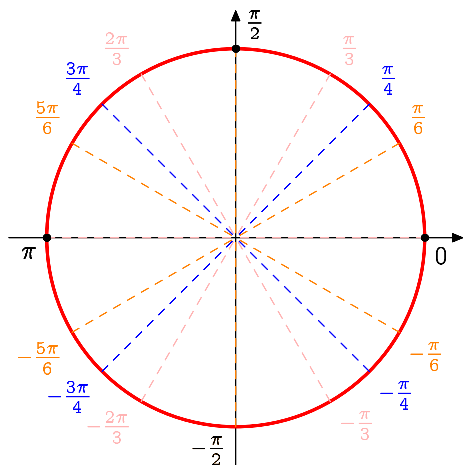
Définition 6 - 1

Cercle trigonométrique
Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1, muni d'une orientation. Le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



2 3 La galette des Rois

Sachant qu'un « tour » correspond à 2π, on peut facilement savoir à quels points du cercle trigonométrique correspondent les fractions de π

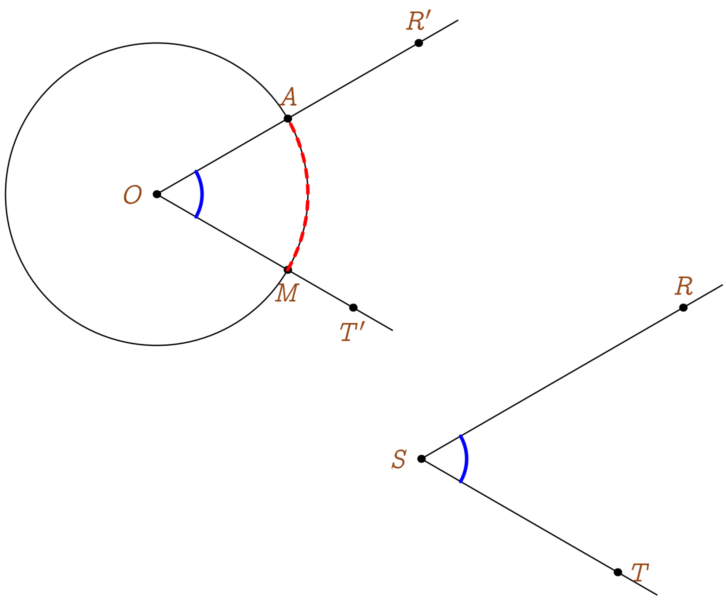


Bien sûr, on pourrait placer les points correspondant à n'importe quel réel, mais c'est un peu moins pratique[a].

2 4 Le radian

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique (de rayon 1).
Soit $\widehat{RST}$ un angle géométrique ; on effectue la translation de vecteur $\overrightarrow{SO}$ de cet angle : on obtient l'angle $\widehat{R'OT'}$, qui est de même mesure que $\widehat{RST}$.
Soient A et M les points d'intersection respectifs des demi-droites $[OR')$ et $[OT')$ avec le cercle $\mathcal{C}$. On a alors $\widehat{RST} = \widehat{R'OT'} = \widehat{AOM}$

a. Essayez donc de couper une galette des Rois en $\sqrt{2}$ parts...



Définition 6 - 2

Angle non orienté

Une mesure en **radians** de l'angle géométrique $\widehat{RST}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{AM}$

Définition 6 - 3

Angle orienté

Une mesure en **radians** de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{SR}, \overrightarrow{ST}\right)$ est égale à la longueur de l'arc **orienté** $\overset{\frown}{AM}$ (Attention au sens)

Demandez aux latinistes l'étymologie du mot *radian*...

Définition 6 - 4

Mesure principale

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure en radian comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Exemple

Quelle est la mesure principale de l'angle orienté de mesure $\frac{129\pi}{34}$?

$$\frac{129}{34} = \frac{4 \times 34 + 3}{34} = 4 + \frac{3}{34}$$

donc

$$\frac{129\pi}{34} = \frac{3\pi}{34} + 2 \times 2\pi$$

La mesure principale cherchée est donc $\frac{3\pi}{34}$

Exemple

Quelle est la mesure principale de l'angle orienté de mesure $\frac{125\pi}{34}$?

$$\frac{125}{34} = \frac{4 \times 34 - 1}{34} = 4 - \frac{1}{34}$$

donc

$$\frac{125\pi}{34} = -\frac{\pi}{34} + 2 \times 2\pi$$

La mesure principale cherchée est donc $-\frac{\pi}{34}$

Correspondance entre degrés et radians

Il y a **proportionnalité** entre la mesure des angles en degrés et mesure en radians ; il faut juste retenir que 180 degrés correspondent à π radians et on retrouve alors facilement que le coefficient de proportionnalité vaut...

Mesure en degrés	180	30	45	60	90	360
Mesure en radians	π	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	2π

2 5 Relation de Chasles

Tout est dans le titre :

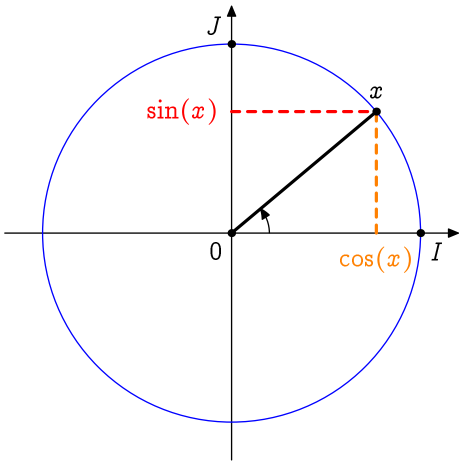
Théorème 6 - 1

Relation de Chasles

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

3 Sinus et cosinus

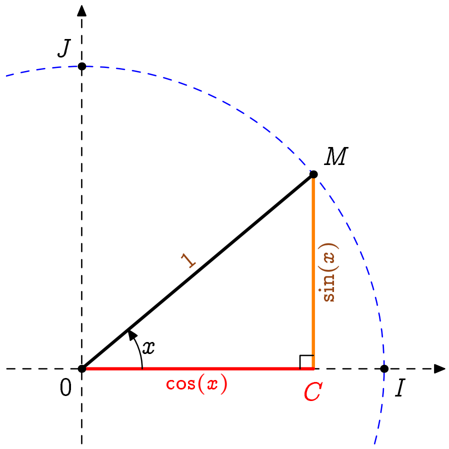
3 1 Définitions



Nous venons de voir qu'il est simple de repérer des points associés à des sous-multiples de π, moins pour les autres.
Pour y remédier, nous allons revenir à notre bon vieux système d'abscisses et d'ordonnées.
Pour les désigner, nous allons choisir des petits noms qui sonnent bien, par exemple...*sinus* et *cosinus* ! Ces noms vous disent-ils quelque chose ? Pourtant au collège, vous n'aviez pas du tout parlé de radian, de droite des réels qui tourne autour d'un cercle et autres complications.
On pourra utilement se reporter à l'exercice Recherche 6 - 19 page 72 pour avoir les *vraies* définitions des *lignes trigonométriques* d'un angle aigu.

Définition 6 - 5

Cosinus et sinus
Quelque soit le réel x, on appelle **cosinus** et **sinus** du réel x l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé à x.
On les note $\cos(x)$ et $\sin(x)$.



Y aurait-il malgré tout un lien ? Mmmmm... regardons la figure précédente de plus près... Pour des valeurs de x comprises entre 0 et $\pi/2$, on retrouve le *soca* du *socatoa* vu au collège, donc au moins il n'y a pas de contradiction avec ce qui a été vu dans le passé. Nous avons même vu (cf exercice Recherche 6 - 5 page 68) comment calculer géométriquement les lignes trigonométriques de quelques valeurs particulières.

Ce petit dessin nous permet en plus de vérifier certaines propriétés importantes. Par exemple :

Propriété 6 - 1

Première formule de trigonométrie
Pour tout réel x

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Remarque

notation
On utilise souvent la notation $\cos^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et de même pour le sinus.

On peut encore remarquer que

Propriété 6 - 2

Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

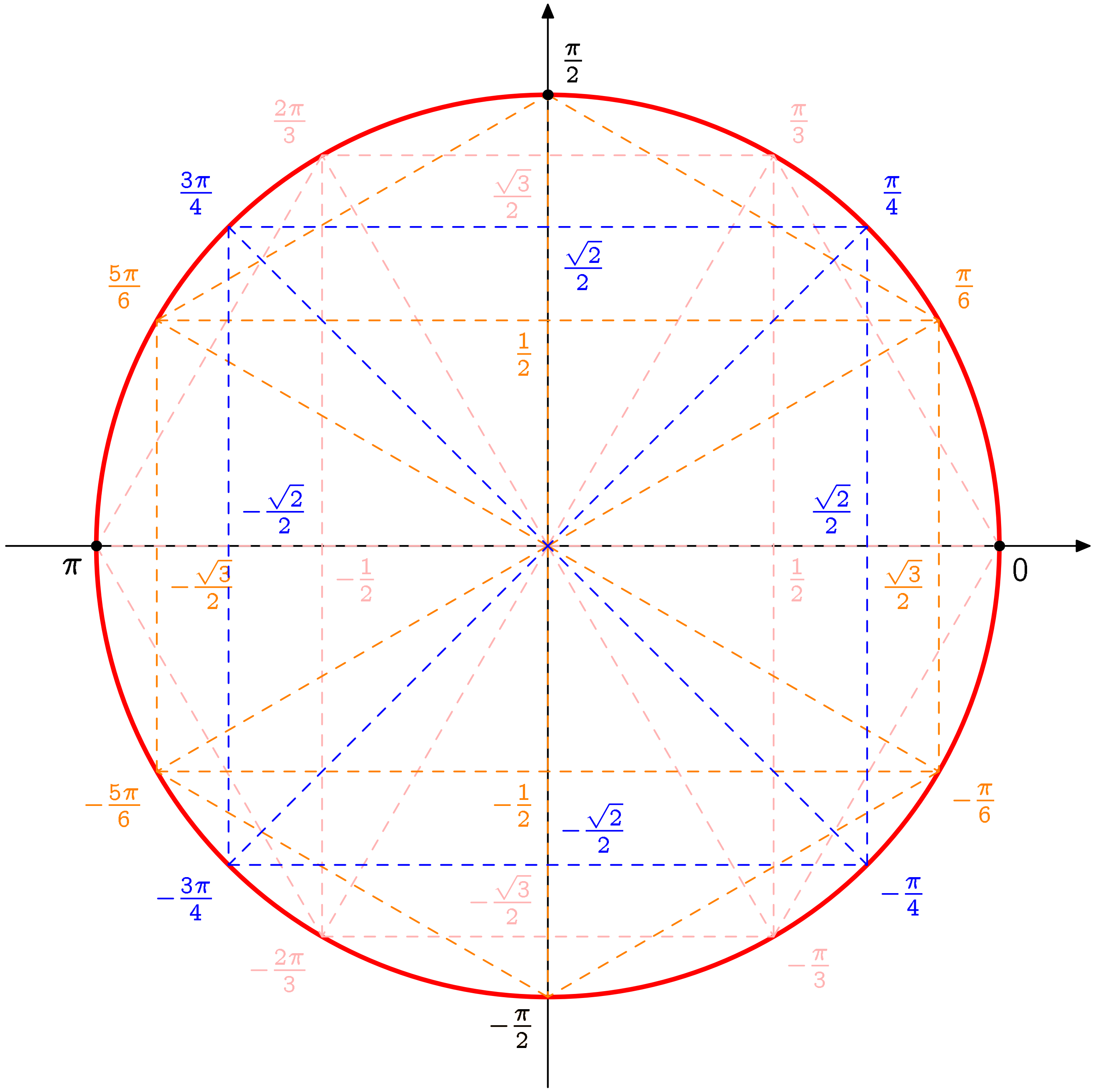
On remarquera également que les réels x et $x + 2\pi$ sont associés au même point, donc ont le même cosinus et le même sinus.

Propriété 6 - 3

Périodicité
Pour tout réel x,

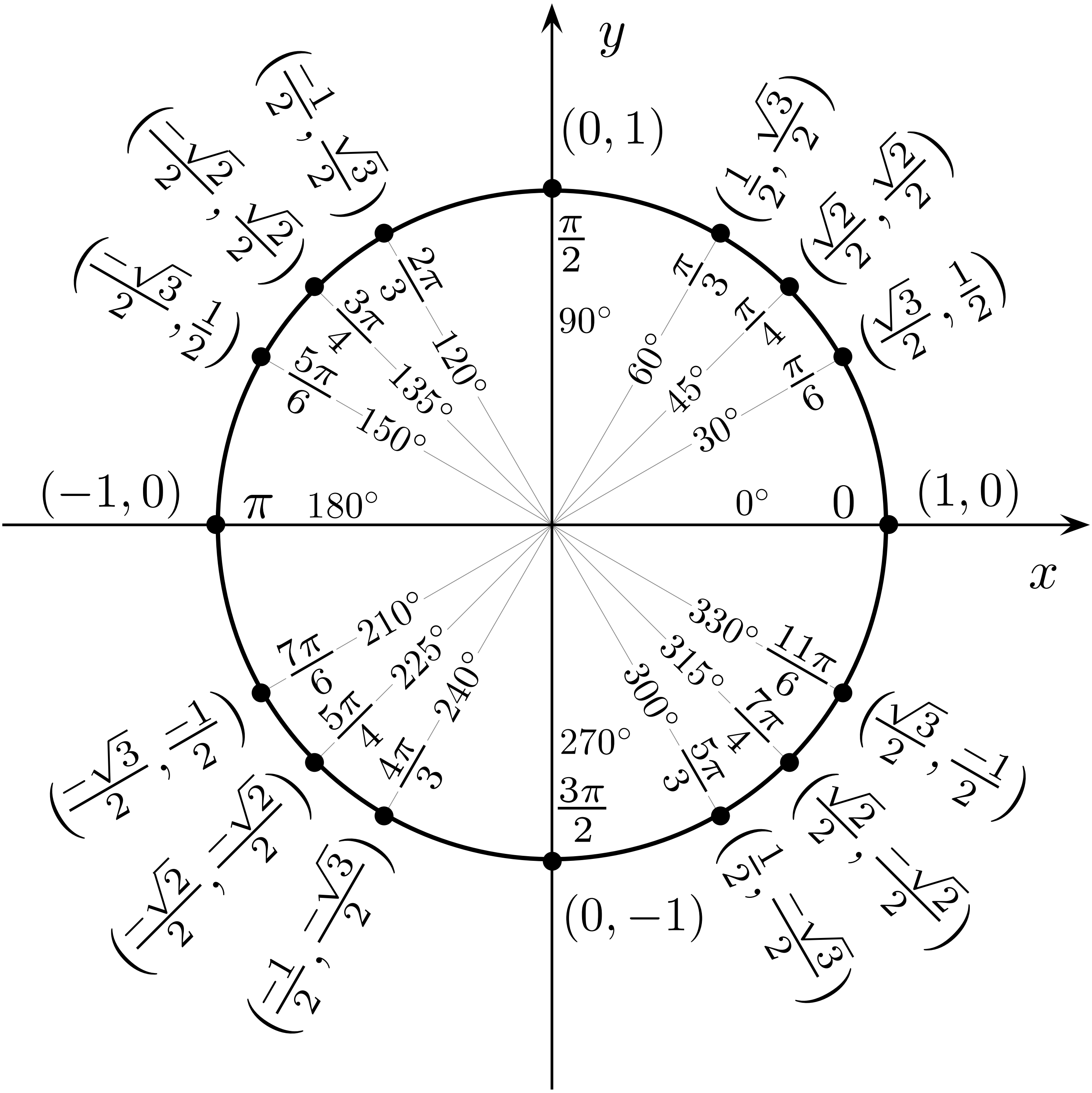
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Retenez les valeurs particulières suivantes



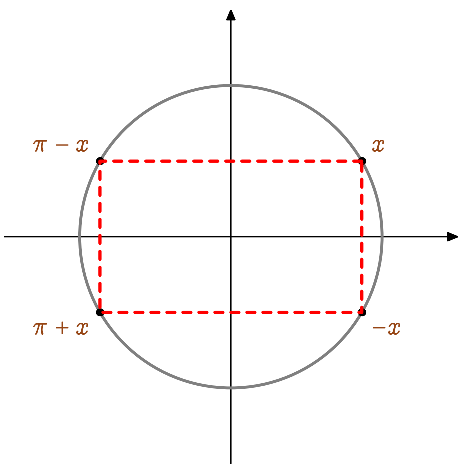
π/2
2π/3
π/3
3π/4
√3/2
π/4
√2/2
5π/6
π/6
1/2
−√2/2
√2/2
π
0
−√3/2
−1/2
1/2
√3/2
−5π/6
−1/2
−π/6
−√2/2
−3π/4
−√3/2
−π/4
−2π/3
−π/3
−π/2

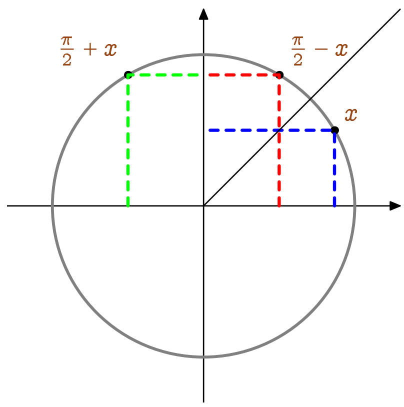
ou encore :



3 2 Angles associés

Que vous inspirent les dessins suivants :





3 3 Fonctions sinus et cosinus

Nous venons de voir qu'à chaque réel x, nous pouvons associer une unique valeur de $\cos x$ et $\sin x$. Nous allons donc pouvoir définir deux *fonctions* cosinus et sinus

Définition 6 - 6

Fonctions cosinus et sinus

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1\,;\,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \qquad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1\,;\,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

3 4 Parité

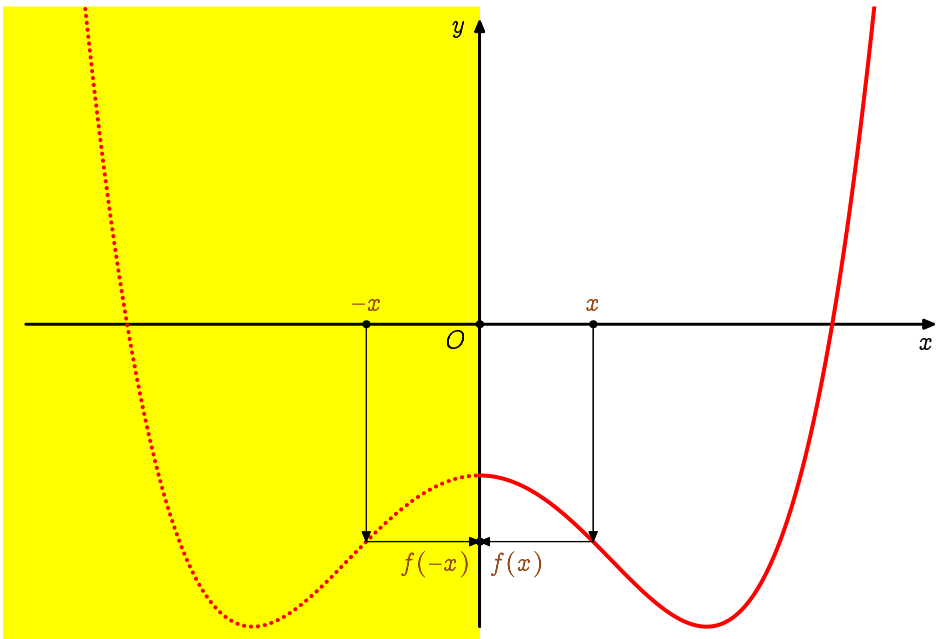
Définition 6 - 7

Fonction paire

Dire qu'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est PAIRE signifie que :

$$\text{Pour tout nombre } x \text{ appartenant à } \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$$

Dans ce cas, la courbe représentative de f dans un repère *orthogonal* est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**



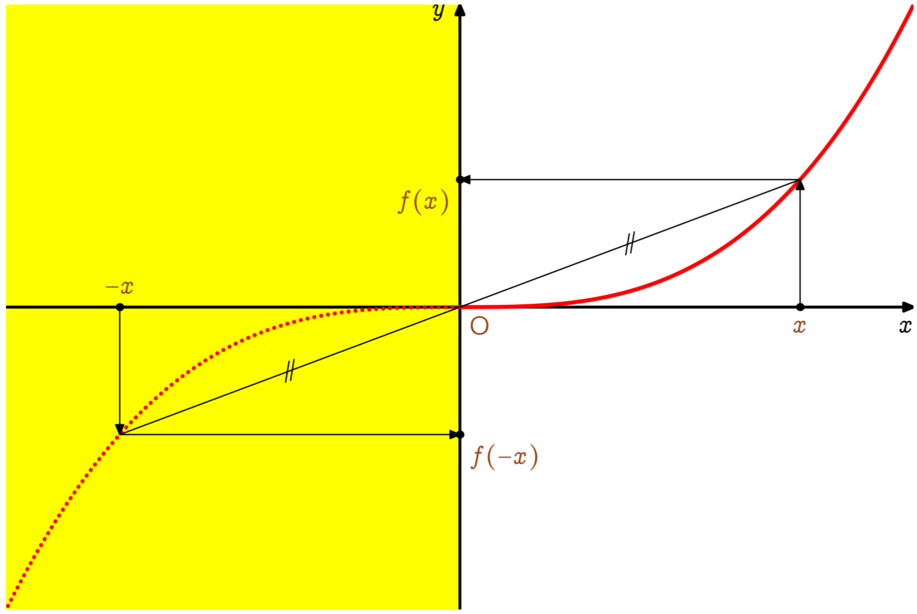
Définition 6 - 8

Fonction impaire

Dire qu'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est IMPAIRE signifie que :

$$\text{Pour tout nombre } x \text{ appartenant à } \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$$

Dans ce cas, la courbe représentative de f dans un repère *orthogonal* est **symétrique par rapport à l'origine**

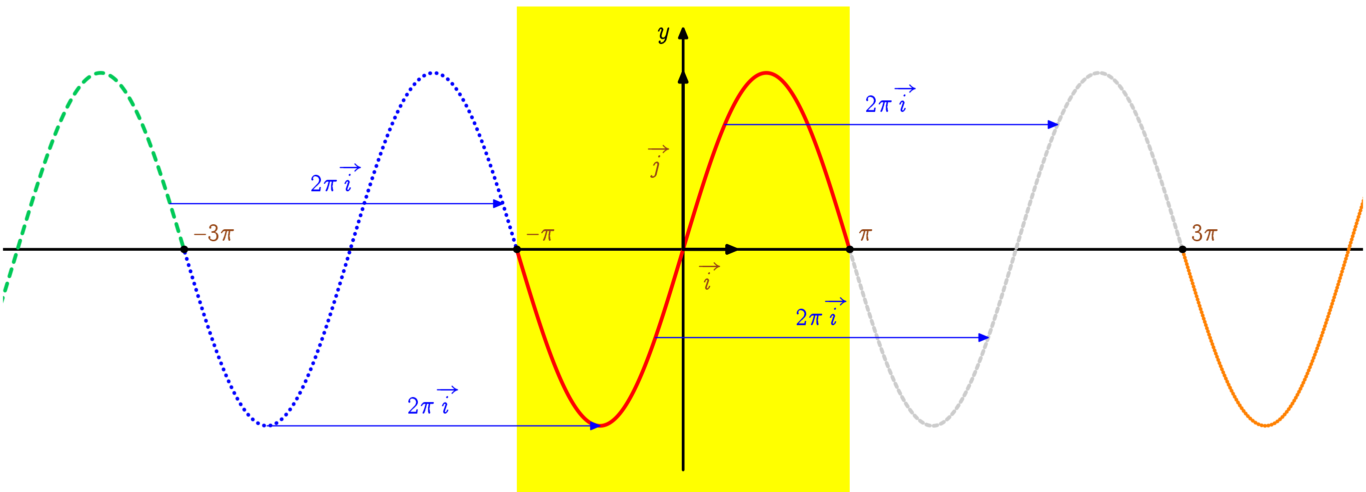


Nous avons vu à l'exercice Recherche 6 - 6 page 69 que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire.

3 5 Périodicité

Vous avez bien sûr remarqué que $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ pour tout réel x.

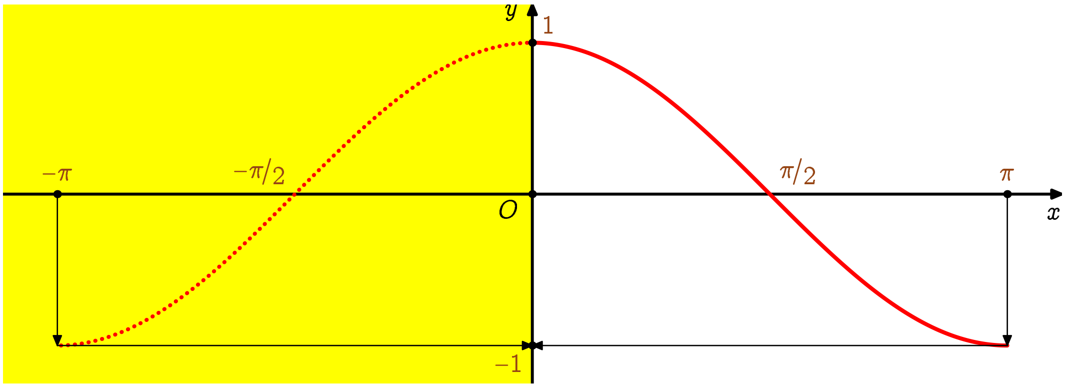
Cela se comprend à la fois sur le cercle trigonométrique du fait de l'enroulement (cf 6.2.1 page 58) et sur la représentation graphique des fonctions :



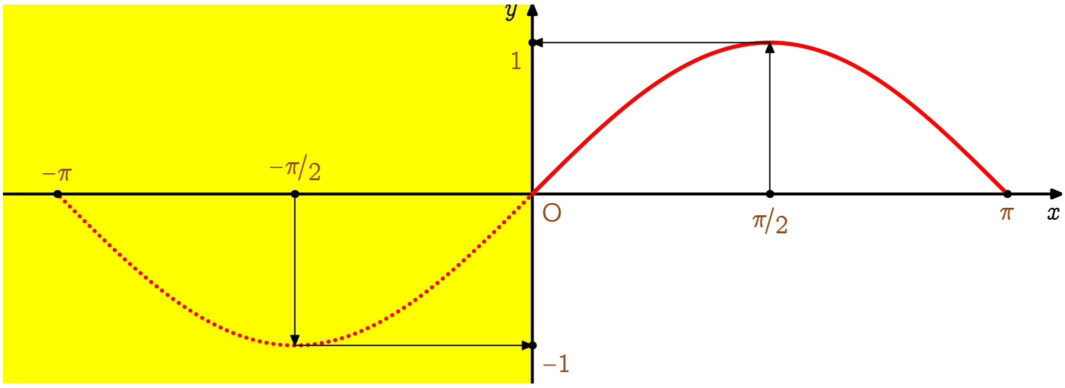
3 6 Variations

Nous retiendrons les résultats suivants :

x	$-\pi$		0		π
Variations de cos	-1	↗	1	↘	-1



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de sin	0	-1	1	0



4 Exercices

Recherche 6 - 1 Transformations radian ↔ degré

1. Convertir en radians les mesures suivantes données en degrés :

$$10, \qquad 53, \qquad 180, \qquad 60, \qquad 18.$$

2. Convertir en degrés les mesures suivantes données en radians :

$$\frac{\pi}{3}, \qquad \frac{2\pi}{3}, \qquad \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{3\pi}{8}.$$

Recherche 6 - 2 Longueurs d'arcs circulaires

Sur un cercle de rayon 10cm, calculer la longueur de chacun des arcs de cercle interceptés par des angles au centre de mesure :

1. en radians :

$$a)\ \frac{\pi}{2} \qquad b)\ \frac{\pi}{3} \qquad c)\ \frac{2\pi}{3} \qquad d)\ \frac{3\pi}{4} \qquad e)\ 0,2.$$

2. en degrés :

$$a)\ 90 \qquad b)\ 120 \qquad c)\ 80.$$

Recherche 6 - 3

Soit $\mathcal{C}_0$ un cercle de centre A et B un point de ce cercle.

1. Construire les points C, D, E, et F du cercle $\mathcal{C}_0$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3\pi}{4} \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{7\pi}{6} \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)=\frac{-3\pi}{4}$$

2. Déterminer une mesure de chacun des angles suivants :

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)$$

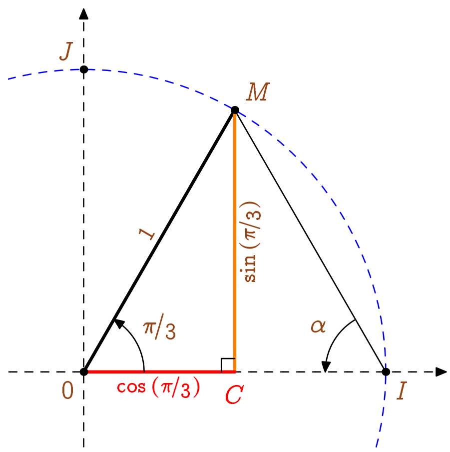
Recherche 6 - 4

Tracer un cercle trigonométrique.

1. En noir, placer dessus à l'aide du compas, les points correspondant au angle de mesure $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et π.
2. En rouge, placer les points de mesure $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$.
3. En vert, placer les points de mesure $\frac{-\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{-13\pi}{6}$.

Recherche 6 - 5 Valeurs particulières

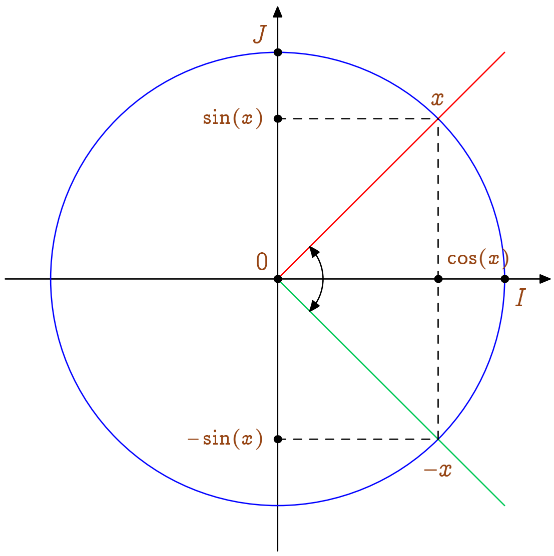
On veut calculer les lignes trigonométriques de $\pi/3$. Pour cela, on considére le point M du cercle trigonométrique correspondant au réel $\pi/3$ et le point C tel que $OC = \cos(\pi/3)$.



1. Quelle est la nature du triangle OMI ?
2. Déduisez-en α.
3. Montrez alors que OMI est en fait un triangle équilatéral.
4. Que représente le segment $[C, M]$ pour le triangle OMI ?
5. Déduisez-en $\cos(\pi/3)$ puis $\sin(\pi/3)$.
6. Imaginez maintenant un moyen de calculer les lignes trigonométriques de $\pi/6$ et de $\pi/4$.

Recherche 6 - 6 Parité des fonctions sinus et cosinus

Que vous inspire ce dessin et le titre de cet exercice :



Recherche 6 - 7 Équation trigonométrique

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation

$$(E) \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Recherche 6 - 8 Équation trigonométrique

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation

$$(E) \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0;2\pi]$

Recherche 6 - 9 Déterminer une coordonnée manquante

1. Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0;\pi]$ tel que

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

Déterminer la valeur exacte de $\sin x$

2. Même question, mais x est maintenant un nombre réel de l'intervalle $[-\pi;0]$.

Recherche 6 - 10 Plusieurs mesures pour un même angle, mesure principale.

1. Sur un cercle trigonométrique, placer les graduations multiples de $\frac{\pi}{6}$.
2. Placer le point M tel que l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\frac{17\pi}{6}$ rad.
3. Quelle autre mesure, en radians, aurait-on pu donner pour cet angle ?
4. Donner encore quatre mesures différentes de cet angle (toujours en radians) :
   — deux positives.
   — deux négatives.
5. Combien existe-t-il de mesures différentes de cet angle ?
6. Parmi toutes les mesures possibles, donner celle qui correspond à l'arc le plus court. Cette mesure est dite *mesure principale* de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$.
7. Donner les mesures principales de chacun des angles suivants :

$$\frac{23\pi}{6} \quad ; \quad \frac{23\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-23\pi}{4} \quad ; \quad \frac{-23\pi}{2} \quad ; \quad \frac{15\pi}{4} \quad ; \quad \frac{-79\pi}{6} \quad ; \quad \frac{33\pi}{8} \quad ; \quad \frac{17\pi}{6}$$

Recherche 6 - 11 Cosinus et sinus des angles associés

.

1. **i.** Placer sur un cercle trigonométrique les points de mesures $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
   ii. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{3})$, $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\cos(\frac{4\pi}{3})$, $\sin(\frac{5\pi}{3})$, $\sin(\frac{2\pi}{3})$ et $\sin(\frac{4\pi}{3})$.
2. **i.** Placer sur un cercle trigonométrique les points de mesures $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.
   ii. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{6})$, $\cos(\frac{-\pi}{6})$, $\cos(\frac{7\pi}{6})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$, $\sin(\frac{-\pi}{6})$ et $\sin(\frac{7\pi}{6})$.
3. **i.** Placer sur un cercle trigonométrique les points de mesures $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
   ii. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\cos(\frac{5\pi}{4})$, $\cos(\frac{7\pi}{4})$, $\sin(\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{5\pi}{4})$, $\sin(\frac{7\pi}{4})$, $\tan(\frac{3\pi}{4})$, $\tan(\frac{5\pi}{4})$ et $\tan(\frac{7\pi}{4})$.

Recherche 6 - 12

Simplifier le plus possible :

1. $A = \cos(-\pi) + \cos(-\frac{3\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{4})$
2. $B = \cos(0) + \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{3\pi}{4}) + \cos(\pi)$
3. $C = \sin(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{5\pi}{6}) + \sin(\pi)$

Recherche 6 - 13

On considère l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$

1. **i.** Dans un repère orthonormée, tracer un cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

   ii. En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

2. En s'inspirant de la démarche effectuée à la question précédente, résoudre, à l'aide d'un cercle trigonométrique chacune des équations suivantes :

   i. $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

   ii. $\sin(x) = \frac{1}{2}$

   iii. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   iv. $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Recherche 6 - 14

Résoudre chacune des inéquations suivantes en utilisant un cercle trigonométrique :

1. $\sin(x) \geq 0$ pour $x \in [-2\pi; \pi]$
2. $\cos(x) \leq 0$ pour $x \in [\pi; 2\pi]$
3. $\sin(x) < 0$ pour $x \in [-\pi; 0]$
4. $\sin(x) > 0$ pour $x \in [0; 3\pi]$

Recherche 6 - 15

On considère les intervalles :

$$I_1 =]-\pi; -\frac{\pi}{2}[\quad ; \quad I_2 =]-\frac{\pi}{2}; 0[\quad ; \quad I_3 =]0; \frac{\pi}{2}[\quad ; \quad I_4 =]\frac{\pi}{2}; \pi[$$

1. Sur un cercle trigonométrique, représenter par un arc de cercle chacun des intervalles définis ci-dessus.
2. Associer à chacun des systèmes ci-dessous un arc puis un intervalle.

$$\S_1 \begin{cases} \cos(x) & > & 0 \\ \sin(x) & < & 0 \end{cases} \quad \S_2 \begin{cases} \cos(x) & > & 0 \\ \sin(x) & > & 0 \end{cases} \quad \S_3 \begin{cases} \cos(x) & < & 0 \\ \sin(x) & > & 0 \end{cases} \quad \S_4 \begin{cases} \cos(x) & < & 0 \\ \sin(x) & < & 0 \end{cases}$$

Recherche 6 - 16

Un vélodrome est une piste circulaire pour les coureurs cyclistes. On y circule en partant de A et dans le sens trigonométrique. On choisit comme unité de longueur le rayon de la piste donc le rayon vaut $r = 1$.

1. Roger a parcouru la moitié de la piste ; il est arrivé en C :

   i. Placer C.

   ii. Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$?

   iii. A quelle mesure d'angle (en degrés) correspond ce parcours ?

2. Roger a parcouru les $\frac{3}{4}$ de la piste. Il est arrivé en D.

   i. Placer D.

   ii. Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AD}$ correspondant à ce parcours ?

   iii. A quelle mesure d'angle (en degrés) correspond ce parcours ?

3. Roger a parcouru un arc de longueur $\frac{\pi}{2}$.

   i. Placer son point d'arrivée B.

ii. A quelle mesure d'angle correspond ce parcours ?

] Le but de cet exercice est de placer les mesures principales connues en radian. On placera les points sur un cercle identique au précédent.

1. **i.** Comment trace-t-on au compas la moitié d'un angle ?

ii. En remarquant que $\frac{\pi}{4}$ est la moitié de ......, placer sur le cercle le point M_4 de graduation $\frac{\pi}{4}$.

2. **i.** $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\dots}$ donc pour placer $\frac{\pi}{3}$, il suffit de partager le cercle en ... parties égales.

ii. Placer sur le cercle le point M_3 de graduation $\frac{\pi}{3}$.

3. En remarquant que $\frac{\pi}{6}$ est la moitié de ......, placer sur le cercle le point M_6 de graduation $\frac{\pi}{6}$.

4. En remarquant que $\frac{3\pi}{4} = 3 \times \frac{\pi}{4}$, placer la graduation $\frac{3\pi}{4}$.

5. Placer de même les graduations $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$.

Recherche 6 - 17 **Angles orientés**

Placer sur le cercle trigonométrique les points E, F, G et H tels que :

1. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \dfrac{-\pi}{4}$

2. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{-\pi}{6}$

3. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}\right) = \dfrac{-5\pi}{6}$

4. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{-7\pi}{3}$

Recherche 6 - 18 **Établir une formule de trigonométrie**

Montrer que l'égalité ci-dessous est vraie pour tout réel x :

$$\left(\sin x + \cos x\right)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

Recherche 6 - 19 **Lignes trigonométriques**

Dans un repère orthonormé, on a tracé un cercle de rayon 1, l'origine O du repère, le point A de coordonéées $(1;0)$, le point B de coordonnées $(0;1)$, un point M quelconque du cercle et quelques points associés à M : T l'intersection de (OM) avec la perpendiculaire à (OA) en A, U l'intersection de la perpendiculaire à (OB) en B avec la perpendiculaire à (OA) en A, Δ la droite (OU), P le point de (OA) de même abscisse que M et Q le point de (OB) de même ordonnée que M.
On note α l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$
On définit quelques fonctions de la variable α :

— la sécante de l'angle α : $\sec(\alpha) = \dfrac{OT}{OA}$;

— la tangente de l'angle α : $\tan(\alpha) = \dfrac{AT}{OA}$;

— le sinus de l'angle α : $\sin(\alpha) = \dfrac{PM}{OA}$;

— on appelle cosécante, cotangente, cosinus de l'angle α et on note $\operatorname{cosec}(\alpha)$, $\operatorname{cotan}(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ respectivement la sécante, la tangente et le sinus du *complémentaire* de l'angle α.

1. **i.** Que pouvez-vous dire à propos de la droite (Δ) ?

ii. Construisez les symétriques des points M, P, A, O par rapport à (Δ).

iii. On note β l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right)$: quel rapport existe entre α et β ?

2. Montrez que $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$.

3. Montrez que $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

4. Montrez que $\text{cotan}(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$.

5. Montrez que $\text{cosec}(\alpha) = \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$.

6. Exprimez simplement $\sin(\alpha) \times \sec(\alpha)$ et $\cos(\alpha) \times \text{cosec}(\alpha)$.

Recherche 6 - 20 SAT

$(1 - \sin x)(1 + \sin x) =$

1. $\cos x$ **2.** $\sin x$ **3.** $\tan x$ **4.** $\cos^2 x$ **5.** $\sin^2 x$

Recherche 6 - 21 SAT

$\dfrac{\tan x \cos x}{\sin x} =$

1. $\frac{1}{\tan x}$ **2.** $\frac{1}{\cos x}$ **3.** 1 **4.** $\cos^2 x$ **5.** $\tan x$

Recherche 6 - 22 SAT

$\dfrac{1}{\cos x} - (\sin x)(\tan x) =$

1. $\cos x$ **2.** $\sin x$ **3.** $\tan x$ **4.** $\cos^2 x$ **5.** $\sin^2 x$

Recherche 6 - 23 SAT

$\dfrac{\tan x - (\sin x)(\cos x)}{\tan x} =$

1. $1 - \cos x$ **2.** $1 - \sin x$ **3.** $\tan x + 1$ **4.** $\cos^2 x$ **5.** $\sin^2 x$

Recherche 6 - 24 SAT

$\sec^2 x - 1 =$

1. $\sin x \cos x$ **2.** $\sec^2 x$ **3.** $\tan^2 x$ **4.** $\cos^2 x$ **5.** $\sin^2 x$

Recherche 6 - 25 SAT

$\dfrac{1}{\sin x \,\text{cotan}\, x} =$

1. $\cos x$ **2.** $\sin x$ **3.** $\tan x$ **4.** $\sec x$ **5.** $\text{cosec}\, x$

Recherche 6 - 26 SAT

$\sin x + (\cos x)(\text{cotan}\, x) =$

1. $\text{cosec}\, x$ **2.** $\sec x$ **3.** $\text{cotan}\, x$ **4.** $\tan x$ **5.** $\sin x$

Recherche 6 - 27 Balistique

L'équation de la trajectoire d'un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suivant une direction faisant un angle α avec l'horizontale est donnée par

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha)x^2 + (\tan \alpha)x, \quad x \in [0, X(\alpha)],$$

où g est l'accélération de la pesanteur et $X(\alpha)$ l'abscisse du point du sol où retombe le projectile. On suppose que v_0 est donnée et que le lanceur peut choisir α dans $]0, \pi/2[$.

1. Comment lancer le plus loin possible ?

2. Montrer que tous les points du sol accessibles, en dehors du point optimal, peuvent être atteints de deux manières exactement : par un tir tendu et par un tir en cloche.

Recherche 6 - 28 Équation trigonométrique...du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin^4 x - \frac{5}{2}\sin^2 x + 1 = 0$.

Recherche 6 - 29 Périodicité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$.

1. Prouver que f est paire.
2. Prouver que f est périodique, de période π.

Recherche 6 - 30 Périodicité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \cos x$.

1. Prouver que f est impaire.
2. Prouver que f est périodique, de période π.

Recherche 6 - 31 Déterminer une coordonnée manquante – Utilisation des symétries

1. Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, démontrer que

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

2. En déduire que

$$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$

3. En déduire les sinus et cosinus de

$$a = \frac{11\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{23\pi}{12}$$

Recherche 6 - 32 Application d'une formule de trigonométrie

Dans cet exercice, on admet que l'on a, pour tout réel x,

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

et l'on va utiliser cette formule pour déterminer quelques sinus et cosinus « exotiques ».

1. On donne

$$\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{avec} \qquad x \in I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

   i. Calculer $\sin x$.
   ii. En déduire $\sin 2x$.
   iii. Déterminer un encadrement de $2x$ lorsque x est dans l'intervalle I.
   iv. Déduire des questions précédentes que $x = \frac{\pi}{8}$.

2. On donne

$$\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{avec} \qquad x \in I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

i. Calculer $\sin 2x$ en procédant comme précédemment.

ii. En déduire x.

Recherche 6 - 33

Représenter graphiquement, sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$, les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = |\cos(x)| \quad ; \quad g(x) = \sin(x) + |\sin(x)|$$

THÈME N° 7

Variables aléatoires

En 2006, un probabiliste reçoit pour la première fois une médaille Fields. Il s'agit du français Wendelin WERNER. Voici comment il décrivait ses travaux : « *Take scissors and cut completely at random a shape in a piece of paper. What can you say about this shape ? Part of the question is to make sense of notion "completely at random" because there are infinitely many possibilities. One motivation to study this type of question comes from physics : If you consider a physical system and raise its temperature, then at certain values of the temperature, there occurs sudden change of its macroscopic behaviour : Liquid becomes vapour, iron looses its spontaneous magnetisation etc. It has been observed empirically that when a system is exactly at such a "critical" temperature, it can exhibit random macroscopic features. For instance, if the system is planar, then the two phases may coexist and the lines separating the regions corresponding to each of the phases are then random loops, just as those cut out by scissors.* »
C'est l'aboutissement de presque 400 ans d'évolution depuis le mémoire sur les jeux de hasard de Gerolamo CARDANO au XVI^{e} siècle en passant par l'axiomatisation des probabilités en 1933 par КОЛМОГОРОВ.

1 Préambule pédagogique : le seul paragraphe utile de ce poly

Ne pas lire les préambules, sauf celui-ci, ni les apartés : ils ne servent à rien.
Ce qui sert c'est ça :

À retenir

Ce qui sert vraiment - Méthode à suivre
Tout ce qui est écrit en dehors de ce paragraphe ne sert à rien. Ce qui est utile est de suivre la méthode suivante.
Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

— déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par la valeur aléatoire X définie dans le texte de l'exercice ;

— calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements $\{X = x_i\}$ correspondants ;

— regrouper les résultats dans un tableau du type

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $\mathbb{P}(\{X = x_i\})$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

À retenir

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la v.a.r. pondérée par leurs probabilités respectives ce qui est assez logique. On utilise la calculatrice comme en statistiques.

La variance, c'est comme en statistique $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$ ou mieux ! On prend la calculatrice et on lit le résultat.

Définition 7 - 1

Écart-type
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Théorème 7 - 1

Linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Lecteur français de Londres du XXI^{e} siècle, arrête ici ta lecture et passe aux exercices, de couleur rose de préférence.

2 Préambule énigmatique : le hasard, ça existe ?

Le hasard est symbolisé par le lancement d'un dé. Pourtant, rien n'est plus *déterministe* ! Le dé obéit aux lois physiques : inertie, friction, élasticité et bien sûr la gravité. On connaît parfaitement ces lois assez simples à étudier...et pourtant...
Les jeux de hasard dans un casino ou le choix aléatoire de nombres nécessaires à la sécurité informatique dépendent d'une fonction qui renvoie un nombre *au hasard*. Mais comment un algorithme peut-il renvoyer un nombre au hasard ? D'autant plus que ces nombres sont générés par une formule du style :

$$X_{n+1} = (a \cdot X_n + c) \mod m$$

3 Préambule philosophiqe : le hasard, qu'est-ce que c'est ?

Pierre-Simon de LAPLACE (1749 - 1827)

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent *axiomatique*) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec EUCLIDE, il a fallu attendre le XVI^{e} siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Qu'est-ce que le hasard ?
Parmi toutes les définitions possibles, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

— **pour certains**, tout a une cause, et le hasard n'est que le reflet de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII^{e} siècle au moment où LAPLACE posa les bases d'une première théorisation des probabilités. C'est dans cet esprit que vous avez étudié les probabilités jusqu'ici. Les probabilités sont alors déterminées *a priori*, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de $1/6$. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de PASCAL, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'**équiprobabilité** : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.

Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ? Nous en reparlerons un peu plus loin.

— **pour d'autres**, le hasard constitue notre univers. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent que d'obtenir une estimation des états possibles futurs. Les probabilités ne peuvent alors être calculées a priori.

Cet antagonisme peut se résumer en considérant l'expérience très simple suivante : on jette une punaise en l'air ; va-t-elle retomber sur la pointe ou sur la tête ?
Pour les « Laplaciens », il existe un nombre parfaitement déterminé, mais pas encore calculable *a priori*. On peut néanmoins l'approcher par une série de mesures expérimentales.
Pour d'autres, c'est prêter à la Nature des intentions mathématiques, alors que cette interprétation chiffrée n'est qu'œuvre humaine.

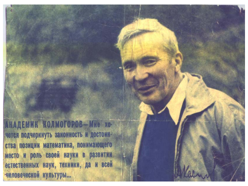
Qui a raison ? Qui a tort ? Le débat est encore ouvert. Nous pouvons néanmoins réunir deux grands groupes. Ceux qui prônent une étude expérimentale des probabilités ne sont en fait pas très éloignés des « Laplaciens », car l'idée centrale contenue dans la Loi des grands nombres qui gouverne les probabilités du lycée (en gros, la limite[a] des fréquences observées est égale à la probabilité : plus on fait de mesures, plus la fréquence se rapproche de la probabilité) est basée sur la définition Laplaciennne de la probabilité : cas favorables sur cas possibles.
Inversement, la géométrie du hasard des Laplaciens (1 chance sur 6 d'obtenir chacune des faces d'un dé) repose sur la parfaite symétrie du dé. Mais un dé peut-il être parfaitement symétrique ? Pour le vérifier, il faudrait faire un grand nombre d'expériences...

a. il s'agit de la limite stochastique qui n'a rien à voir avec les limites étudiées au lycée...

Bref, au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent. Mais il faut les avoir en tête : tout n'est pas équiprobable (voir le jeu du *passadieci* que nous allons étudier) et la probabilité ne peut se réduire à la limite des fréquences, ne serait-ce que dans le cas d'une expérience qui ne peut se répéter : quelle est la probabilité de survivre à une guerre nucléaire ? Il semble difficile d'imaginer une série d'expériences pour s'approcher de cette probabilité...

Mêmes si elles peuvent apparaître antagonistes, ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie. Comme le disait John Stuart Mill : *we must remember that the probability of an event is not a quality itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it.* Faute de données sures, en économie on estime a priori les probabilités de certains événements élémentaires, puis on utilise ensuite des théorèmes abstraits issus des mathématiques.

Oublions tout ce que nous venons de dire !



Андрей Николаевич КОЛМОГОРОВ (1903 - 1987)

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.
Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe KOЛМОГОРОВ., dont vous pouvez apprécier le sourire ci-contre, pour enfin les axiomatiser, alors qu'EUCLIDE avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...
C'est ce sujet encore brûlant que nous allons explorer cette année et en Terminale à travers quelques chapitres qui sauront, je n'en doute pas, vous passionner !

Ce qu'ils en pensent

« *Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ?* »
Henri POINCARÉ - La Science et l'hypothèse (1908)

« *[La théorie des probabilités] donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements. [...] Il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.* »
Pierre Simon de LAPLACE - Essai philosophique sur les probabilités (rédigé de 1795 à 1825)

« *The true logic of this world lies in the calculus of probabilities* »
James C. MAXWELL - The Scientific Letters and Papers of James C. Maxwell, Vol. 1, 1846-1862

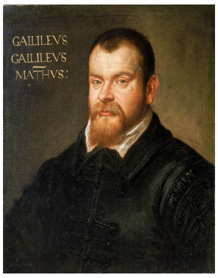
« *We cannot predict whether a given photon will arrive at A or B. All we can predict is that out of 100 photons that come down, an average of 4 will be reflected by the front surface. Does this mean that physics, a science of great exactitude, has been reduced to calculating only the probability of an event, and not predicting exactly what will happen ? Yes. That's a retreat, but that's the way it is : Nature permits us to calculate only probabilities. Yet science has not collapsed.* »
Richard P. FEYNMAN - The strange theory of light and matter (1985)

« *The generation of random numbers is too important to be left to chance.* »
Clifford PICKOVER - Computers, Pattern, Chaos and Beauty, Courier Corporation, (2012)

4 Préambule ludique : au commencement était le jeu

Gerolamo Cardano
(1501 - 1576)

C'est comme ça que tout a commencé et ce sera notre fil rouge tout le long de ce chapitre. Cardano a été un des scientifiques les plus importants de la Renaissance dans des domaines aussi divers que les mathématiques, la physiaue, la chimie, l'astronomie, la philosophie,...Il est célèbre pour ses travaux sur les gyroscopes, le... *cardan* en mécanique, les nombres imaginaires, l'étude des équations du troisième et du quatrième degré.
C'était également un joueur invétéré ce qui l'a incité à être l'un des fondateurs de la future théorie des probabilités dans son *Liber de ludo aleae* écrit vers 1564. Il a pris les jeux de dés pour illustrer son propos. On trouve notamment l'étude du problème des trois dés.



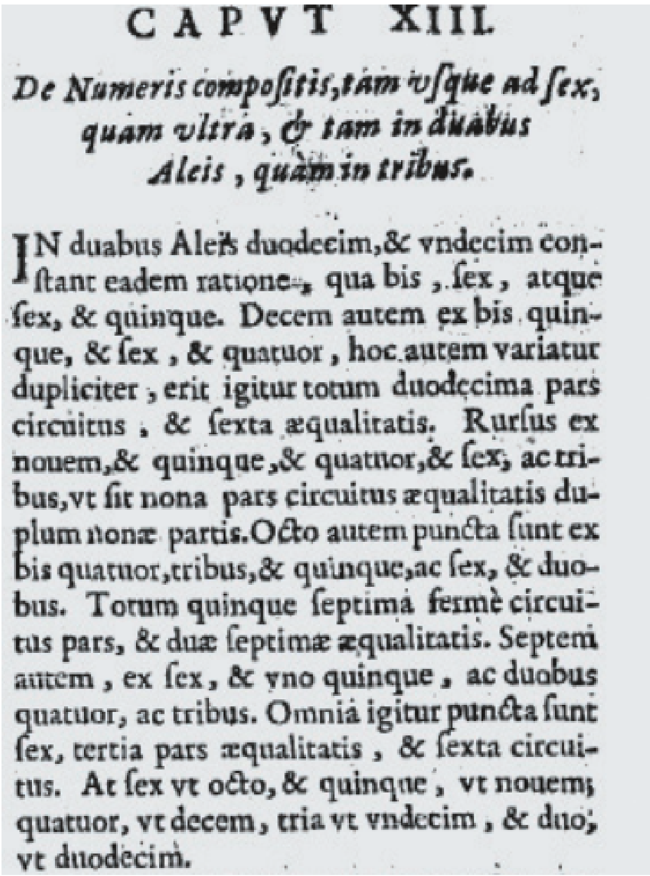
Galileo Galilei
(1564 - 1642)

Le jeu du *passadieci* consistait à lancer trois dés et à additionner le numéro des faces. Il fallait obtenir au moins 11 pour gagner.
Presqu'un siècle plus tard, Galilée publia *Sopra le Scoperte dei Dadi*, un mémoire sur le même problème que lui avait en fait posé son protecteur, le Grand Duc de Toscane :

> Supposons que trois dés soient lancés et que les trois numéros obtenus soient additionnés. Les scores de neuf, dix, onze et douze peuvent être obtenus avec six combinaisons différentes. Pourquoi alors une somme de dix ou onze apparaît plus souvent qu'une somme de neuf ou douze ?

Recherche Résolvez le problème du Duc de Toscane

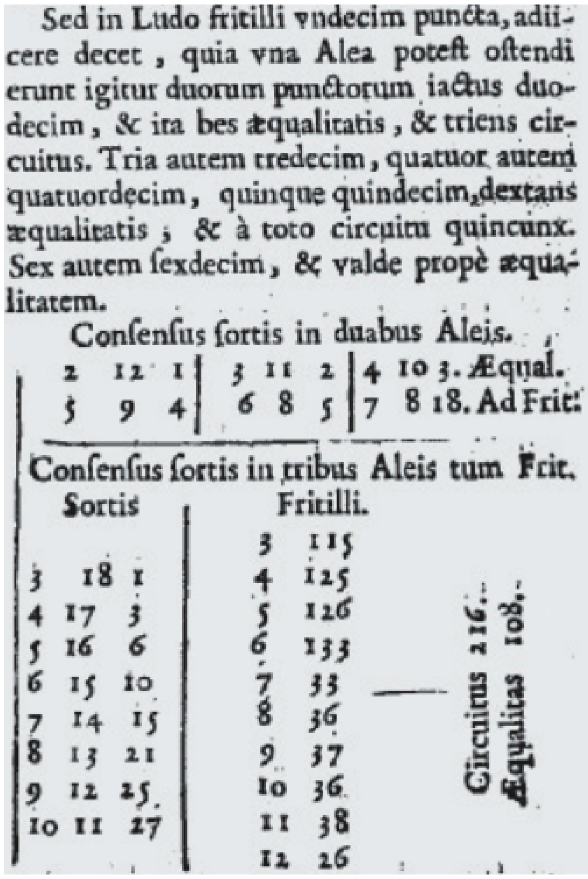
Pour vous aider, voici ce qu'en dit Cardano :



CAPVT XIII

De Numeris compoſitis, tam vſque ad ſex, quam vltra, & tam in duabus Aleis, quam in tribus.

IN duabus Aleis duodecim, & vndecim conſtant eadem ratione, qua bis, ſex, atque ſex, & quinque. Decem autem ex bis quinque, & ſex, & quatuor, hoc autem variatur dupliciter, erit igitur totum duodecima pars circuitus, & ſexta æqualitatis. Rurſus ex nouem, & quinque, & quatuor, & ſex, ac tribus, vt ſit nona pars circuitus æqualitatis duplum nonæ partis. Octo autem puncta ſunt ex bis quatuor, tribus, & quinque, ac ſex, & duobus. Totum quinque ſeptima fermè circuitus pars, & duæ ſeptimæ æqualitatis. Septem autem, ex ſex, & vno quinque, ac duobus quatuor, ac tribus. Omnia igitur puncta ſunt ſex, tertia pars æqualitatis, & ſexta circuitus. At ſex vt octo, & quinque, vt nouem; quatuor, vt decem, tria vt vndecim, & duo, vt duodecim.



Sed in Ludo fritilli vndecim puncta, adiicere decet, quia vna Alea poteſt oſtendi erunt igitur duorum punctorum iactus duodecim, & ita bes æqualitatis, & triens circuitus. Tria autem tredecim, quatuor autem quatuordecim, quinque quindecim, dextans æqualitatis; & à toto circuitu quincunx. Sex autem ſexdecim, & valde propè æqualitatem.

Conſenſus ſortis in duabus Aleis.

2	12	1	3	11	2	4	10	3.	Æqual.
5	9	4	6	8	5	7	8	18.	Ad Frit.

Conſenſus ſortis in tribus Aleis tum Frit.

Sortis			Fritilli.	
			3	115
3	18	1	4	125
4	17	3	5	126
5	16	6	6	133
6	15	10	7	33
7	14	15	8	36
8	13	21	9	37
9	12	25	10	36
10	11	27	11	38
			12	26

Circuitus 216.
Æqualitas 108.

Chapitre 13 du *Liber de Ludo Aleae*

Pour vous éviter de lancer un million de fois trois dés, faisons faire la sale besogne à Python :

```
from numpy.random import randint
from collections  import Counter

nbExp = 10**6

lesSommes = [sum( randint(1,7,size = 3) )  for k in range(nbExp)]

effectifs = Counter(lesSommes)
```

et nous obtenons :

```
In [1]: effectifs
Out[1]:
Counter({3: 4662,
         4: 13696,
         5: 27906,
         6: 46576,
         7: 69602,
         8: 96970,
         9: 115599,
         10: 125020,
         11: 125103,
         12: 115728,
         13: 97174,
         14: 69291,
         15: 46405,
         16: 27640,
         17: 14007,
         18: 4621})
```

Est-ce qu'on s'intéresse aux évènements du style « obtenir ⚃ ⚃ ⚁ » ? « obtenir ⚃ ⚁ ⚃ » ? « obtenir ⚄ ⚀ ⚃ » ?

Ou bien « obtenir une somme égale à 10 » ?

Il est temps de passer à un peu de théorie...

5 Préambule...logique : une probabilité, au fait, qu'est-ce que c'est ?

Pour bien comprendre de quoi nous parlons, il vaut mieux savoir de quoi nous parlons (...c'est profond !). Vous avez découvert les années précédentes les probabilités dans un cas bien particulier : vous les définissiez comme **le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles**. Cette manière de définir les probabilités est étroitement liée d'une part au fait que l'univers soit un ensemble fini et d'autre part au fait que chaque événement élémentaire a la même probabilité (cas d'**équiprobabilité**). Nous en reparlerons plus en détail au moment de l'étude des lois continues l'an prochain, mais autant avoir tout de suite une définition du concept de probabilité applicable dans un cadre général.

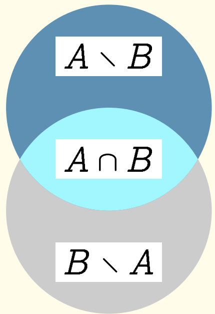
Définition 7 - 2

probabilité
Notons Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience (l'univers).
On appelle probabilité sur Ω toute « transformation » $\mathbb{P}$ allant de l'ensemble des « parties » de Ω dans $[0,1]$ et vérifiant $\mathbb{P}(\Omega)=1$ et $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$ pour toute « partie » A et B de Ω *disjointes*.

Recherche

Vous vérifierez qu'à partir de cette définition, on obtient les propriétés usuelles

$$\mathbb{P}(\varnothing)=0,\quad \mathbb{P}(\overline{A})=1-\mathbb{P}(A),\quad \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$



Pour la dernière propriété, je vous donne un petit coup de pouce : il faut découper notre réunion en ensembles disjoints en écrivant par exemple que

— $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$
— $B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$
— $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$

Vérifiez également que $A\subset B\Longrightarrow\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}(B)$.

À retenir

Une probabilité est une fonction qui permet de **mesurer** le degré de certitude d'un évènement sur une échelle de 0 à 1

Danger

Faîtes bien attention maintenant à ne pas confondre univers fini et équiprobabilité. Considérez par exemple la situation suivante : on sonne à votre porte. Quelle est la probabilité pour que ce soit Emma STONE (ou Ryan GOSLING si vous préférez) qui vienne vous demander en mariage ? L'univers ne contient que deux événements élémentaires : ou bien c'est Emma ou bien ce n'est pas Emma. Le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles est donc de 1/2, pourtant...

6 Cours : loi de probabilité

Vous vous souvenez que l'*univers* probabilisable, souvent noté Ω, est constitué de toutes les « éventualités » ou « issues » d'une expérience aléatoire.
Avant de parler de lois de probabilités, penchons nous sur le terme *discrètes* : il traduit le fait que l'on peut « dénombrer » chacune des issues ; on peut leur donner un numéro.
Nous étudierons en Terminale des lois de probabilité *continues* : on ne pourra pas donner un numéro à chacune des issues ; par exemple, on ne peut pas compter tous les nombres réels compris entre 2 et 3.

Définition 7 - 3

Variable aléatoire (réelle)
Soit $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ un univers muni d'une probabilité. On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$...qui a certaines propriétés que nous ne pouvons pas décrire à notre niveau...

Bon, c'est un peu frustrant mais il faut juste en fait que chaque image réciproque d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit un évènement de Ω dont on peut calculer la probabilité...Mouais.

La définition précédente n'est pas très parlante, il faut essentiellement retenir que l'on va s'intéresser à des événements décrits par des nombres, les variables aléatoires nous permettent de décrire, et donc de noter, facilement des événements à l'aide de nombres. Une v.a. est *réelle* car X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et *finie* car l'univers est fini donc l'ensemble image de X aussi.

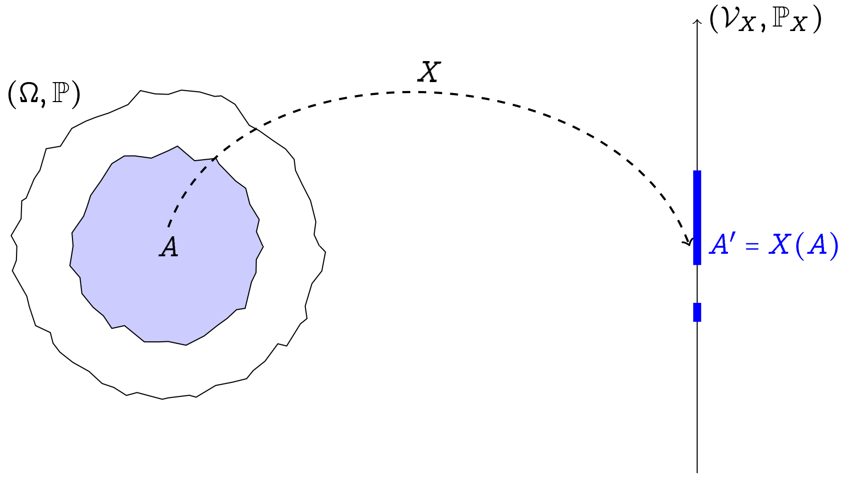
Danger

Vous noterez qu'une *variable* aléatoire réelle (v.a.r. pour les intimes) est en fait une *fonction* !...

Soit $x_1, \cdots, x_k$ les différentes valeurs prises par la fonction X. On note $\{X = x_i\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur x_i ». Il se note rigoureusement

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$$

ce qui se lit « l'ensemble des évènements ω de l'univers Ω tels que $X(\omega) = x_i$ ».
Nous noterons $\mathcal{V}_X = X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la v.a. X.



Définition 7 - 4

Loi de probabilité
Soit (Ω, p) un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire sur Ω.
On appelle **loi de probabilité** de X la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\varphi \ : \ x \mapsto \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

ou avec les abus de notation :

$$\varphi \ : \ x \mapsto \mathbb{P}(\{X = x\})$$

À retenir

Si $x \notin \Omega$, alors $\{X = x\} = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0$.

À retenir

Ce qui sert vraiment - Méthode à suivre
Tout ce qui vient d'être écrit ne sert à rien. Ce qui est utile est de suivre la méthode suivante.
Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

— déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
— calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;
— regrouper les résultats dans un tableau du type

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $\mathbb{P}(\{X = x_i\})$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

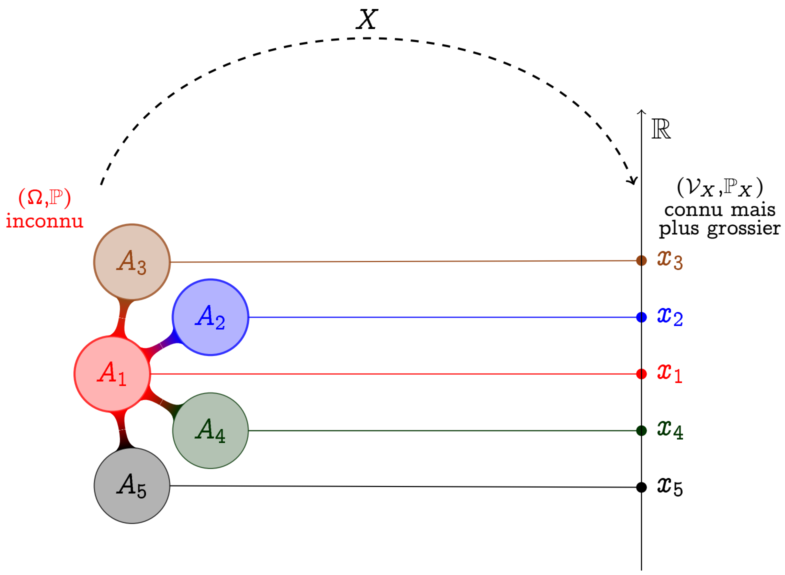
En général, on se trouve dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\text{Pr inconnue}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\text{Pr}_X \text{ connue}"] \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Aparté

Dans la vraie vie, on connaît les valeurs prises par la v.a.r. mais on ne connaît pas bien Ω, voire pas du tout. On réfléchit donc sur les lois et non pas sur des ensembles comme au lycée.
Par exemple, on peut vouloir réfléchir au nombre de plantages d'un réseau. On estime statistiquement les probabilités de tomber 0, 1, 2, etc. fois en panne dans une journée. On ne sait pas trop ce qu'est Ω mais on peut parler de la loi de X.
En fait, une variable aléatoire « transporte » les calculs de probabilités d'un univers inconnu vers des valeurs réelles connues.
La v.a.r. condense l'information sur l'univers en une information plus grossière (numérique) mais c'est déjà bien car en général on ne connaît de toute manière pas ou peu l'univers de départ !...
On retiendra donc que le « praticien » travaille la plupart du temps avec des lois de probabilités et non pas des ensembles : cela simplifie son travail car il peut travailler sur des espaces complexes (l'univers de départ est souvent trop complexe voire inconnu) sans les connaître.

L'information donnée par la loi est souvent plus grossière : par exemple, on lance deux dés et on regarde la somme des deux faces. On a normalement 2^{36} évènements possibles (pourquoi ?...croyez-moi sur parole !) alors que dans le nouvel univers il n'y a plus que 2^{11} évènements (il y a 11 sommes possibles).



Danger

Deux v.a.r. peuvent avoir la même loi sans être égales ! On lance n fois une pièce non truquée. Considérez X le nombre de pile tombés et $n - X$ le nombre de face. Ces deux v.a.r. suivent la même loi et pourtant elles ne sont pas égales.

Définition 7 - 5

Fonction de répartition : pas au programme français mais au programme anglais
Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

On note souvent cette fonction F_X.
Voici quelques propriétés que vous démontrerez :

Théorème 7 - 2

Propriétés de F_X

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X est croissante (sens large).
3. $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
4. $F_X(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - \mathbb{P}(X > a)$

7 Cours : variance et espérance

7 1 Espérance mathématique

Définition 7 - 6

Espérance mathématique
On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire discrète X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot \mathbb{P}(\{X = x_1\}) + x_2 \cdot \mathbb{P}(\{X = x_2\}) + \cdots + x_n \cdot \mathbb{P}(\{X = x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(\{X = x_i\})$$

Exemple : on lance un dé honnête. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du dé est pair et 1 sinon.
Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	2	1	2	1	2

D'après le théorème précédent, on a $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$
Nous aurions pu procéder autrement pour définir la loi de probabilité :

Valeurs x_i prises par X	1	2
$\mathbb{P}(\{X = x_i\})$	1/2	1/2

alors, d'après la définition, $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

À retenir

L'espérance est la moyenne des valeurs prises par la v.a.r. pondérée par leurs probabilités respectives ce qui est assez logique

7 2 Variance

La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérées par la probabilité correspondante, ce qui donne :

Définition 7 - 7

Variance
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \cdot \mathbb{P}(\{X = x_i\})$$

On a choisi d'utiliser les carrés de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. On va donc définir une distance proprement dite en en prenant la racine carrée : c'est ce qu'on appelle l'**écart-type**.

Définition 7 - 8

Écart-type
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Vous pouvez obtenir espérance, variance et écart-type très simplement à l'aide des modules statistiques de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, les probabilités correspondantes en liste 2.

7 3 Linéarité de l'espérance

À partir de variables aléatoires existantes, on peut en créer de nouvelles.
Avec des notations usuelles on obtient :
$aX + b : \omega_i \mapsto aX(\omega_i) + b$ avec a et b des réels.
On peut alors démontrer la propriété suivante :

Théorème 7 - 3

Linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\cdot\mathbb{P}(\{X=x_i\}) = a\mathbb{E}(X)+b$$

Notons $Y = aX + b$.
Pour tout $\omega_i \in \Omega$ on a $Y(\omega_i) = aX(\omega_i) + b$ et donc $y_i = ax_i + b$ avec les notations usuelles donc $\left\{\omega\in\Omega|Y(\omega)=y_i\right\} = \left\{\omega\in\Omega|aX(\omega)+b=ax_i+b\right\} = \left\{\omega\in\Omega|X(\omega)=x_i\right\}$
Alors
$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbb{P}(Y=y_i) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\mathbb{P}(X=x_i) = a\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{P}(X=x_i) + b\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_i)$
On en déduit que $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Recherche

Théorème de König-Huygens
Johann KÖNIG (1712-1757) fut un mathématicien allemand, élève de Jean BERNOULLI et Christian HUYGENS (1629-1695) était lui néerlandais.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

À démontrer...

8 Cours : le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Variables aléatoires discrètes et lois de probabilité. Espérance, variance et écart-type	Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire. Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'uine série de données. On exploite les fonctionnalités de la calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire. On démontre les formules suivantes : $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$ et $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$
Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.	Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. On peut simuler la loi géométrique tronquée

Recherche

Pointer dans le poly les parties qui correspondent aux notions de la seconde colonne de la première ligne, ce qui sert quoi.

9 Exercices

Recherche 7 - 1 A-level

The discrete random variable X has the following probability distribution :

Values of x	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	0.2	0.3	0.25		0.1

1. Find $\mathbb{P}(X=3)$ and $\mathbb{P}(0<X<2)$
2. Find the expectation and the variance of X.
3. Write down a table to represent the cumulative distribution function.

Recherche 7 - 2 A-level

The discrete random variable X has the following probability distribution :

Values of x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$1/2$	p	p	$1/4$

1. Find the value of p and $\mathbb{P}(0<X<2)$
2. Find the expectation and the variance of X.
3. Write down a table to represent the cumulative distribution function.

Recherche 7 - 3 A-level

The random variable X has mean μ and standard deviation σ. Express each of the following in terms of μ and σ as simply as possible :

1. $\mathbb{E}(4X)$
2. $\mathbb{V}(4X)$
3. $\mathbb{E}(2X-3)$
4. $\mathbb{V}(2X-3)$

Recherche 7 - 4 A-level

The discrete random variable X takes the values, in pence, of the coins in a cash till. The proportions of the various coins are :

Values of x	1	2	5	10	20	50	100	200
$\mathbb{P}(X=x)$	0.1	0.1	q	q	r	0.35	r	0.05

Given that $\mathbb{E}(X)=39.2$ find

1. The values of q and r
2. The standard deviation of X

Recherche 7 - 5 A-level

A biased die with six faces is rolled. The discrete random variable X represents the score on the uppermost face. The probability distribution of X is shown in the table below.

Values of x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=x)$	a	a	a	b	b	0.3

1. Given that $\mathbb{E}(X) = 4.2$ find the value of a and the value of b.
2. Find $\mathbb{V}(5-3X)$

A biased die with five faces is rolled. The discrete random variable X represents the score on the uppermost face. The probability distribution of X is shown in the table below.

Values of x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$1/10$	$2/10$	$3k$	$4k$	$5k$

4. Find the value of k.
5. Each dice is rolled once. The scores on the two dice are independent. Find the probability that the sum of the two scores equals 2.

Recherche 7 - 6 **A-level**

The discrete random variable X can only take the values 1, 2 and 3. For these values the cumulative distribution function is defined by :

$$F_X(x) = \frac{x^3+k}{40}$$

1. Find the value of k.
2. Find the probability distribution of X.
3. Find $\mathbb{E}(X)$ and $\mathbb{V}(X)$.

Recherche 7 - 7 **A-level**

A discrete random variable X has the probability function :

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} k(1-x)^2 & x = -1, 0, 1 \text{ and } 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Find the value of k.
2. Find $\mathbb{E}(X)$.
3. Find $\mathbb{V}(1-3X)$.

Recherche 7 - 8 **A-level**

The discrete random variable Y has probability disribution :

Values of x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x)$	a	b	0.3	c

The cumulative distribution function $F(y)$ of Y is given in the following table :

Values of x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x)$	0.1	0.5	d	1

1. Find the values of a, b, c and d.
2. Find $\mathbb{P}(3Y + 2 \geqslant 8)$

Recherche 7 - 9 **Autre problème historique**

Le Chevalier de Méré soutient à Pascal que les deux jeux suivants sont favorables au joueur : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois de suite un dé, et obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois de suite 2 dés. Vous simulerez ces expériences à l'aide de votre logiciel préféré et vous démontrerez les résultats observés.

Recherche 7 - 10 Dé pipé

Gailleurs bien faitz en piperie
Pour ruer les ninars au loing
A l'asault tost sans suerie
Que les mignons ne soient au gaing
Farciz d'un plumbis a coing
Qui griffe au gard le duc
Et de la dure si tres loing
Dont l'amboureх luy rompt le suc.

in *Ballade en Jargon* - Attribué à François VILLON - 1489

Un dé est pipé de manière à ce que lorsque l'on lance ce dé, chacun des chiffres apparaît avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué lorsqu'on le lance.

Recherche 7 - 11 Roulette

Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort.
Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort.
Il est interdit de miser sur le zéro.

1. Un joueur mise £a sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de C puis calculez $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.
2. Un joueur mise £a sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de N puis calculez $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.
3. Vaut-il mieux miser sur une couleur ou un numéro ?

Recherche 7 - 12 Espérance vs écart-type : les dés

On lance deux dés honnêtes. On note X la variable aléatoire qui donne le plus grand des numéros obtenus et Y celle qui donne le plus petit.
Donnez les lois de chacune des deux variables ainsi que les espérances et les variances.

Recherche 7 - 13 Crise du logement Syldave

Le ministre syldave du logement doit faire face à une surpopulation syldave galopante. Il propose donc le jeu suivant à la population :
le ministre dispose d'un pistolet à six coups chargé de trois balles. Le joueur tire jusqu'à ce qu'une balle vienne frapper sa boîte crânienne, le ministre faisant tourner le barillet entre chaque essai. Si la tête du candidat explose dès le premier coup, l'État verse 2 neurones à la famille du défunt et le jeu s'arrête ; si c'est au deuxième coup, la famille reçoit 4 neurones ; si le bang arrive au troisième coup, le ministre débourse 2^3 neurones, etc.

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le gain en neurones de la famille. Montrez que l'espérance mathématique est infinie et que donc chaque syldave a intérêt à jouer...

2. Que se passe-t-il si le ministre ne dispose que de 1 000 000 de neurones ? Quelle participation le ministre peut-il alors demander pour rentrer dans ses frais ?

Recherche 7 - 14 Compétition syldave

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0,95, la deuxième de 0,93 et la troisième de 0,9.
On suppose que le moral de Prschtr est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses trois figures ?
2. Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ?
3. D'en manquer deux ?
4. De manquer les trois ?
5. Dresser alors le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$.
6. Manquer la première figure fait perdre 0,2 point et la deuxième ou la troisième 0,1 point. Les pénalités s'ajoutent. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Recherche 7 - 15 Formule du crible de Poincaré : cas de trois évènements

Déterminez $\Pr(A \cup B \cup C)$ en fonction des probabilités de A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$.

Recherche 7 - 16 « C'est sans danger... »

Afin d'effectuer des économies dans le budget de l'État, le premier ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. Dans le but de promouvoir les liens sociaux, les dentistes sont maintenant choisis parmi les anciens boxeurs aveugles et parkinsoniens. Ils arrachent les dents de leurs patients au hasard.

Suite à quelques plaintes, une étude statistique a été menée dans le cabinet d'un de ces nouveaux dentistes. Les syldaves venant le consulter ont toujours une seule dent de malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent encore avant l'intervention des tenailles ou des poings, c'est selon (une étude précédente a en effet montré que les syldaves ne retournent jamais chez leur dentiste après une première consultation).
L'étude a été effectuée sur n patients. On note X la variable aléatoire égale au nombre de dents malades extraites à bon escient.

1. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculez la probabilité pour qu'aucune dent malade n'ait été extraite.
2. Combien de patients doit-il traiter pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,9 ?
3. Le dernier patient est prêt à se sacrifier pour la gloire des statistiques syldaves et se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. On note Y le nombre de dents saines que ce vaillant patriote voit tomber de ses mâchoires endolories.
Calculez la probabilité pour qu'il reparte complètement édenté, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Recherche 7 - 17 Inégalité de Jensen

Johan JENSEN
(1859 - 1925)

Supposons que l'on choisisse la longueur d'un côté d'un carré selon une distribution uniforme dans l'intervalle entier [1,99].
Quelle est l'aire moyenne du carré obtenu ?
Notons X la var égale à la longueur du côté tirée aléatoirement.
On cherche donc $\mathbb{E}(X^2)$.
Calculez $\mathbb{E}(X)$ puis $\left(\mathbb{E}(X)\right)^2$.
Pour le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$, on admettra que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
A-t-on $\left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right)$?
Introduire la var $Y = \left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ et calculez son espérance par linéarité. Conclure.
En fait, il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité de JENSEN qui permet d'obtenir que

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) \geqslant f\big(\mathbb{E}(X)\big)$$

pour toute fonction f *convexe*. Pour le démontrer, on peut utiliser un développement de TAYLOR à l'ordre 2 et exploiter le fait que f'' est à valeurs positives car f est convexe, mais je m'arrêterai là...

Recherche 7 - 18 Ordinateur syldave

Piotr a récupéré un vieil ordinateur de bord muni d'un processeur 4 bits sur un avion bordure abattu par les forces du peuple syldave. Il crée un compilateur qui pour l'instant ne renvoie qu'un quartet (une chaîne de 4 bits) au hasard, chaque bit valant 0 avec une probabilité p. Soit X la variable aléatoire égale au quartet renvoyé exprimé en base 10.

1. Établissez la loi de probabilité de X.
2. Calculez son espérance et sa variance.
3. Calculez la probabilité d'obtenir un nombre pair.
4. Calculez la probabilité que le quartet soit un palindrome.

Recherche 7 - 19 Paradoxe syldave

Le problème est simple : prenons deux boîtes identiques A et B dont l'une contient deux fois plus de balles de revolver que l'autre, mais vous ignorez laquelle. La situation est donc totalement symétrique. Pourtant un expert, qui ignore également quelle est la boîte la mieux lotie en balles de revolver, affirme au ministre syldave qu'il faut choisir la boîte B ! Son raisonnement semble imparable : soit n le nombre de balles de revolver dans la boîte A, alors la boîte B en contient soit $2n$, soit $n/2$ avec à chaque fois une probabilité de 1/2. Donc on peut calculer l'espérance mathématique du nombre de balles de revolver dans la boîte B.

$$\mathbb{E} =$$

Stupeur ! Il vaut mieux choisir la boîte B. Or nous aurions pu tenir exactement le même raisonnement en inversant les rôles de A et B pour aboutir à la conclusion inverse. Nous aboutissons à un magnifique paradoxe. Quel est le problème ?

Supposez qu'il y a cinq balles dans A

Recherche 7 - 20 Élection syldave

En Syldavie, l'élection présidentielle se joue à la cravate. Le candidat qui a la moins longue cravate devient ipso facto président de la République syldave et garde la cravate de son adversaire.
La veille de l'élection, le candidat Joe Max Bill Pol réfléchit, allongé dans son lit : « ma cravate a pour longueur L. Si ma cravate est la plus longue, ce qui a une chance sur deux de se produire, je la perds, donc je perds une cravate de longueur L. Sinon, je gagne la cravate de l'autre qui est plus longue que L. Donc une fois sur deux je perds L et une fois sur deux je gagne plus que L. Mon espérance est donc positive donc je suis confiant ». Son adversaire tient bien sûr le même raisonnement...

Recherche 7 - 21 **Le modèle fait la probabilité**

Encore un problème stupide : *Dans un parc il y a trois bancs à deux places. Roger et Ginette vont s'asseoir « au hasard ». Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent sur le même banc ?*
On parle de « hasard », donc d'équiprobabilité, mais de quelles issues : les bancs ou les places ? C'est souvent le problème des calculs de probabilités : pour un même problème, plusieurs modèles peuvent être utilisés pour arriver à des résultats parfois différents.
Ici, montrer que, selon le modèle choisi, la réponse peut-être 1/3 ou 1/5. Y a-t-il un modèle plus pertinent ? Il sera donc important de préciser le modèle choisi avant tout calcul.