

Licence Creative Commons 
Mis à jour le 22 décembre 2017 à 18:42

Une année de mathématiques en 2^{nde}



THÈME N°

NUM3ERS



After more than a decade of intense research,
Derek unveils his calculation for the value of pi.

1

Explorons l'horizon

Recherche

souvenir de vacances

Je suis au bord d'une falaise près de Douvres et je contemple l'horizon, là-bas, au loin, cherchant la côte française. La Terre semble être un disque plat dont je suis le centre. Au fait, à *quelle distance se trouve l'horizon ?*

Un petit dessin s'impose...et d'autres problèmes apparaissent...

Comme nous, Ératosthène, directeur de la bibliothèque d'Alexandrie vers -240, se doutant que la Terre était une sphère, voulut calculer son rayon.

Il observa l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie, le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est à ce moment précis de l'année que dans l'hémisphère nord le Soleil détient la plus haute position au-dessus de l'horizon. Or, Ératosthène remarqua qu'il n'y avait aucune ombre dans un puits à Syène (ville située à peu près sur le tropique du Cancer); ainsi, à ce moment précis, le Soleil était vertical et sa lumière éclairait directement le fond du puits. Ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre; le Soleil n'était donc plus à la verticale et l'obélisque avait une ombre décentrée. Il mesura que l'ombre était 7,2 fois plus petite que l'obélisque.

Ératosthène évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie : la distance obtenue était de 5000 stades, mesure très proche de la réalité, un stade (longueur utilisée dans les stades d'Olympie ou de Delphes) valant environ 157,5 m.

Recherche

rayon de la Terre

En utilisant les mesures d'Ératosthène, peut-on calculer le rayon de la Terre ?

Un nouveau dessin s'impose...et d'autres problèmes apparaissent...

Recherche

une approximation géométrique de π

Il n'est pas trop compliqué de déterminer le périmètre d'un hexagone. « Coinçons » alors un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ entre deux hexagones bien choisis : ça nous permettra d'avoir une première approximation du périmètre du cercle.

Des dessins s'imposent...

Et si on coinçait notre cercle entre deux dodécagones ? Puis entre deux tétraicosagones ? Et si on allait jusqu'à 96 côtés comme Archimède ? Et si on allait plus loin grâce à un ordinateur ?

Ou bien, on peut utiliser un autre résultat qui semble étonnant :

Recherche

une approximation étrange de π

En 1735, Leonard EULER découvre au cours de ses nombreuses recherches le résultat suivant :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Le problème, c'est ces ...

Notons $S(1) = \frac{1}{1^2}$, $S(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$, $S(3) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$ et plus généralement :

$$S(n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Calculons $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$. Des remarques ? Comment faire appel à un ordinateur pour nous aider à aller plus loin ?

2

Expéditions scientifiques

2 1 Voyage à Babylone

2 1 1 Numération babylonienne

Tout à côté de l'Égypte, au cours du deuxième millénaire avant Astérix et Obélix, à Babylone, apparut un autre système de numération. La forme, d'abord, était différente car les Babyloniens utilisaient des tablettes et des poinçons au lieu de papyrus et de pinceaux. Il y avait principalement deux caractères : $\Uparrow$ et $\lessdot$.

Pour compter jusqu'à 59, le système fonctionne comme en Égypte et plus tard en Grèce et à Rome : on ajoute la valeur des signes écrits. Ainsi $\lessdot \Uparrow$ correspond à 12, $\lessdot \lessdot \lessdot$ à 48.

Lisez les nombres suivants : $\lessdot \lessdot \lessdot$; $\lessdot \lessdot \lessdot$; $\lessdot \lessdot \lessdot$.

Proposez d'autres exemples à vos voisins.

À partir de 60, la numération ressemble plus à la nôtre car elle devient « positionnelle » : en effet, la valeur d'un signe dépend de sa position par rapport aux autres.

Ainsi, 63 s'écrit $\Uparrow \lessdot \lessdot$, c'est-à-dire 1 fois 60 plus 3 fois 1.

De même, $\lessdot \lessdot \lessdot \lessdot \lessdot$ correspond à $3 \times 60 + 23 = 203$

Enfin $\lessdot \lessdot \lessdot \lessdot \lessdot \lessdot \lessdot$ correspond à 2 soixantaines de soixantaines + 19 soixantaines + 35, c'est-à-dire ?

Proposez d'autres nombres à vos voisins.

.

Que pensez-vous de cette opération : $\lessdot \lessdot + \lessdot \lessdot = \Uparrow$?

Et de celle-ci : $\lessdot \times \Uparrow \lessdot = \lessdot \lessdot$?

Est-ce que ça ne vous rappelle pas quelque chose ?

Les Babyloniens étaient confrontés à une petite ambiguïté : le nombre $\lessdot \lessdot \lessdot$ qu'on peut noter $[3; 23]$ représentait à la fois

- $3 \times 60 + 23$;
- $3 \times 60^2 + 23 \times 60$;
- $3 + 23 \times \frac{1}{60}$;
- etc.

En fait, cela fait penser aux « multiplications à virgules » de l'école primaire où vous « décalez » la virgule quitte à rajouter des zéros : pourquoi ?

2 1 2 Multiplication babylonienne

Les petits Babyloniens devaient apprendre beaucoup de tables de multiplications qui ressemblaient à ce « cahier » d'écolier : de quelle table s'agit-il ?

2 4 4 Développement décimal périodique

Posez la division de 1 par 3, vous obtenez sans cesse le reste 1 et le développement décimal est donc $0,3333333333\dots$

En fait, il existe une écriture qui évite les $\dots$: $0,\underline{3}$ signifie de la même manière que le 3 se répète infiniment.

Voyez ce que donne $13/7$.

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 10 \\
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 1.857142857
 \end{array}$$

Donc on écrit $13 \div 7 = 1.\underline{857142}\dots$

Recherche

En utilisant ce qui a été fait précédemment, essayez d'écrire $1.\underline{857}$ sous forme de fraction.

2 4 5 Si, et seulement si

Si je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé, mais est-ce que si je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave ?

La première proposition ^b est une **implication** vraie : nager en maillot de bain dans un lac syldave implique d'être mouillé.

On utilise le symbole $\implies$ pour matérialiser cette implication :

Nager en maillot dans un lac syldave $\implies$ être mouillé

La deuxième proposition ^c est l'**implication réciproque**. Dans le cas qui nous occupe, cette implication réciproque est fausse

être mouillé $\nRightarrow$ nager en maillot dans un lac syldave

On dit que ces deux propositions ne sont pas **équivalentes** :

Nager en maillot dans un lac syldave $\nLeftrightarrow$ être mouillé

Recherche

Que pensez-vous de l'affirmation : *Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, c'est un rectangle ?*

Et celle-ci : *Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, c'est un rectangle et un losange*

Revenons à nos nombres.

^b. Si je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé

^c. Si je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave

Recherche

En pensant à la division posée, expliquer pourquoi un nombre rationnel admet forcément un développement décimal périodique.

Inversement, expliquez pourquoi un nombre admettant un développement rationnel périodique est forcément rationnel.

Comment exprimer ces résultats en termes d'équivalence ?

2 4 6 Les limites du développement décimal

Recherche

Écrivez sous forme de fraction le nombre $1,9$.

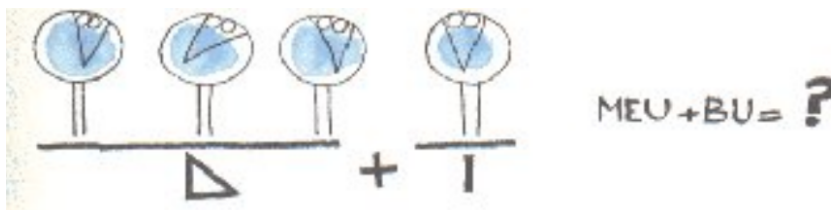
Des remarques ?

3**Les Bases****3 1 La numération shadock**

Le calcul a toujours donné beaucoup de fil à retordre aux Shadoks... En effet n'ayant que quatre cases il ne pouvait pas compter plus que quatre... 1, 2, 3, 4... Mais le professeur Shadoko avait réformé tout ça...

- Quand il n'y a pas de Shadoks, on dit GA ;
- Quand il y a un shadok de plus, on dit BU ;
- Quand il y a encore un shadok de plus, on dit ZO ;
- Et quand il y a encore un autre, on dit MEU.

Si je mets un shadok en plus, évidemment, je n'ai plus assez de mots pour les compter...



alors c'est très simple : on les jette dans une poubelle, et je dis que j'ai BU poubelle. Et pour ne pas confondre avec le BU du début, je dis qu'il n'y a pas de Shadok à côté de la poubelle et j'écris BU GA.



Bu Shadok à côté de la poubelle : BU BU.

Un autre : BU ZO.

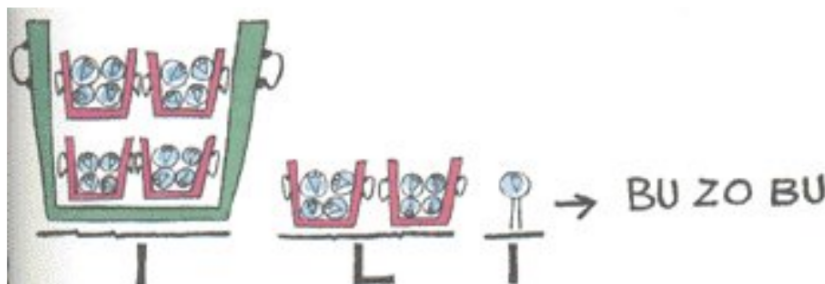
Encore un autre : BU MEU.

...

MEU poubelles et MEU Shadoks à côté : MEU MEU. Arrivé là si je mets un Shadok en plus, il me faut une autre poubelle.

Mais comme je n'ai plus de mots pour compter les poubelles, je m'en débarrasse en les jetant dans une grande poubelle. J'écris BU grande poubelle avec pas de petite poubelle et pas de Shadok à côté : BU GA GA.

Et on continue... BU GA BU, BU GA ZO....



MEU MEU ZO, MEU MEU MEU.

Quand on arrive là et qu'on a trop de grandes poubelles pour pouvoir les compter, eh bien, on les met dans une super poubelle, on écrit BU GA GA GA, et on continue...

Vous trouverez une machine à calculer shadock ici :

<http://www.lessHADOKS.com/telechargement/Install.exe>

Pour voir en image ce que nous venons de découvrir, c'est là :

<https://youtu.be/lP9PaDs2xgQ>

4

Le code bibinaire

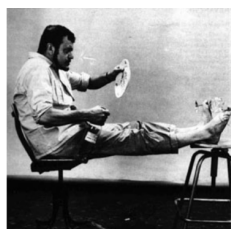


FIGURE 1.1 – Bobby Lapointe (1922 - 1972)

Boby LAPOINTE, célèbre chanteur français, était aussi mathématicien à ses heures. Ayant trouvé le code binaire trop compliqué à utiliser, il inventa le code... bibinaire (il y a un jeu de mot caché). Il suffit de remplacer les chiffres par des lettres. On commence par couper le nombre écrit en binaire en paquets de 2. S'il y a un nombre impair de chiffres, on rajoute un zéro à gauche, ce qui ne modifie pas la valeur de nombre (expliquez pourquoi). On commence par le premier groupe de deux chiffres le plus à droite. On remplace 00 par O, 01 par A, 10 par E, 11 par I.

Puis on prend le paquet de deux chiffres suivants en se déplaçant de droite à gauche. On remplace 00 par H, 01 par B, 10 par K, 11 par D.

Pour le paquet suivant, on recommence avec les voyelles. S'il y a encore un groupe, on remplace par une consonne, etc.

Recherche

1. Écrivez les nombres de 0 à 31 en bibinaire.
2. Récitez la table de multiplication par HI en bibinaire.
3. Quelle est la base du bibinaire ?
4. Pour les curieux : écrivez 1177 en bibinaire.
5. Écrivez KEKIDIBIBI en numération décimale et également KEBOKADO.
6. Pour les très curieux : quel est le plus grand nombre qu'on peut écrire avec six lettres en bibinaire ?

5 Différents ensembles de nombres

Recherche

Nous avons passé en revue différents types de nombres que l'on pourrait regrouper par catégories : lesquelles ?

5 1 Où classer la racine carrée de 2 ?

D'ALFI

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : qu'est-ce que cela implique ?

5 2 Héron d'Alexandrie

Contemporain de l'empereur Auguste, Héron d'Alexandrie est célèbre pour avoir déterminé un moyen d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ mais les Babyloniens connaissaient cette technique bien avant lui.

Le secret de la méthode part de la constatation suivante : si x est un nombre plus grand que $\sqrt{2}$ alors $\frac{2}{x}$ est plus petit que $\sqrt{2}$. Pouvez-vous le prouver ?

Si on part de $x = 2$, qu'est-ce que cela prouve ? Mmmmmmm... pas terrible.

Prenons le milieu entre x et $\frac{2}{x}$: est-il plus grand ou plus petit que $\sqrt{2}$? Comment en être toujours sûr ?

Comment utiliser ces remarques pour trouver une approximation en base 10 de $\sqrt{2}$?

6 Exercices techniques

Recherche 1 - 1

Répondre par vrai ou faux en justifiant vos réponses :

1. Un entier est positif.
2. Un entier n'est pas un décimal.
3. Un décimal est un rationnel.
4. Un quotient de deux nombres est un rationnel.
5. Un nombre peut être à la fois un entier naturel et un entier relatif.
6. 3 est un nombre rationnel.

Recherche 1 - 2

On considère tous les nombres compris entre -4 et 3 inclus.

1. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{N}$?
2. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{Z}$?
3. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{Q}$?
4. Citer un élément de cet intervalle qui soit entier non naturel.
5. Citer un élément de cet intervalle qui soit un rationnel non décimal.
6. Citer un élément de cet intervalle qui soit un réel mais pas un rationnel.

Recherche 1 - 3

On donne un rectangle $STUV$ dont les dimensions exactes en centimètres sont :

$$ST = L = 16 + 4\sqrt{2} \text{ et } TU = l = 16 - 4\sqrt{2}.$$

Calculer, en détaillant et en donnant les valeurs exactes des résultats :

1. Le périmètre P du rectangle $STUV$ en centimètres.
2. L'aire A du rectangle $STUV$ en centimètres carrés.
3. La longueur d de la diagonale du rectangle $STUV$ en centimètres.

Recherche 1 - 4

Compléter toutes les cases du tableau suivant par le symbole $\in$ ou $\notin$

	$\frac{35}{7}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	$1 + 2\sqrt{3}$	$1 + \frac{2}{3}$	$\frac{12}{7+5}$	$\sqrt{5^2 - 4^2}$	$(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$	$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$	$\frac{341}{19}$
$\mathbb{N}$										
$\mathbb{Z}$										
$\mathbb{D}$										
$\mathbb{Q}$										
$\mathbb{R}$										

Recherche 1 - 5

1. Montrer que $\sqrt{1 + \frac{3}{5}} \times \sqrt{1 - \frac{3}{5}}$ est rationnel.
2. Montrer que $(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ et $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ sont des entiers.
3. Montrer que $\left(\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$ est un rationnel.
4. Plus généralement, montrer que les nombres $\left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ le sont aussi.

Recherche 1 - 6

Un fil de section S comporte n électrons par unité de volume se déplaçant à la vitesse v .

L'intensité I du courant circulant dans ce fil est donnée en ampère par la formule :

$$I = nSqv$$

où q désigne une charge électrique.

On donne :

$$n = 6 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

$$q = 1,5 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$v = 2 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$$

$$S = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

1. Faire le calcul de I , en ampère, à l'aide de la calculatrice, et donner le résultat.
2. Faire le calcul à la main en détaillant les étapes.

Recherche 1 - 7

Écrire le nombre suivant sans radical au dénominateur : $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Recherche 1 - 8

Écrire sous forme de fraction irréductible : $B = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$.

Recherche 1 - 9

Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{8} + \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3} + 2\sqrt{27}$ et $BC = \frac{184\,148}{63\,217}$.

1. Donner à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} près de chacun des côtés.
2. Donner les valeurs exactes de AB^2 , AC^2 et BC^2 .
3. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Recherche 1 - 10

1. Décomposer le nombre 1 008 en produit de facteurs premiers.
2. Écrire le nombre $\sqrt{1\,008}$ sous la forme $a\sqrt{7}$ où a est un nombre entier.

Recherche 1 - 11

Soit x un nombre réel. On pose

$$A = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{et} \quad B = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

1. Avec une calculatrice, déterminer des valeurs approchées à 10^{-10} près de A et B pour :

$$x = 10^4 \qquad x = 10^{18} \qquad x = -3$$

2. Démontrer par le calcul que $A = B$.
3. Comment peut-on expliquer les résultats de la question 1. ?

Recherche 1 - 12

Pour trouver la nature d'un nombre, on le simplifie au maximum pour trouver le plus petit ensemble auquel il appartient.

Déterminer la nature des nombres suivants :

$$A = \frac{-\sqrt{144}}{3}; \quad B = \frac{\pi}{314}; \quad C = \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}{45}; \quad D = (5\sqrt{3}+2)^2 - 20\sqrt{3}$$

$$E = \frac{\pi}{3} \div \frac{\pi}{11}; \quad F = 5,3939\overline{39} \dots; \quad G = 5,37 - 11,6$$

Recherche 1 - 13

1. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

i. $H = 4,5 \times 10^5 \times 6,4 \times 10^4$;

ii. $I = -2,45 \times 10^{-4} + 54,7 \times 10^{-4}$;

iii. $J = \frac{4,8 \times 10^{-11} \times 27 \times 10^5}{1,2 \times 10^{-3}}$

2. La vitesse de la lumière est d'environ 3×10^8 m/s. La distance moyenne entre la Terre et le Soleil est d'environ 149×10^6 km. Calculer le temps mis par un rayon lumineux du Soleil pour atteindre la Terre.

Recherche 1 - 14

1. Développer et réduire l'expression $(n+1)^2 - n^2$.

2. En déduire que tout nombre entier impair est la différence de deux carrés.

3. Trouver une différence de deux carrés égale à 13, puis une autre égale à 45.

Recherche 1 - 15

Montrer les égalités suivantes :

1. $\frac{1000+0.00003^2-10^3}{6 \times 10^{-9}} = 0,15$

3. $\frac{5-\sqrt{2}}{23} = \frac{1}{5+\sqrt{2}}$

2. $16 - (\sqrt{3}-5)^2 = (9-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)$

4. $\frac{\sqrt{5}+1}{5+\sqrt{5}} + 7\sqrt{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5}$

Recherche 1 - 16

Développer et réduire :

$$A = (4 - \sqrt{5})^2 \quad B = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 \quad C = (7 - \sqrt{5})(7 + \sqrt{5}) \quad D = (4\sqrt{3} - 2)(3 + \sqrt{3})$$

Recherche 1 - 17

Factoriser les expressions suivantes :

$$A(x) = 64x^2 - 49$$

$$E(x) = 4(x-1)^2 - 2(x-1)(x+3)$$

$$B(x) = 21x^2 - 14x$$

$$F(x) = 4(x-2)^2 - 16$$

$$C(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$G(x) = (5x+3)^2 - (6x-2)^2$$

$$D(x) = (4x-3)^2 - 25$$

Recherche 1 - 18

Déterminer les constantes a , b et c tels que : $\frac{6x^2 - x + 4}{2x - 3} = ax + b + \frac{c}{2x - 3}$.

Recherche 1 - 19

Exprimer chacun des nombres a , b , c et d sous forme d'une fraction irréductible en faisant apparaître les étapes du calcul :

$$a = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \div \frac{5}{2}$$

$$b = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{2 \times (10^3)^7}$$

$$c = \sqrt{\frac{49}{100}} + \frac{(\sqrt{3})^2}{10}$$

$$d = \frac{1}{20} (\sqrt{14} - 1) (\sqrt{14} + 1)$$

Recherche 1 - 20

Parmi les expressions suivantes, indiquer les sommes, les produits et les quotients.

$$A(x) = \frac{2x-3}{x^2+1} \quad B(x) = \frac{x+1}{x} + \frac{1}{4} \quad C(x) = \frac{4x}{3}(x-2)$$

$$D(x) = (5x-1)^2 \quad E(x) = (x-3)2x+7 \quad F(x) = 3x(x+1)$$

NB : on fera des phrases du type : « $G(x)$ est le produit de $(x+7)$ par $(x-3)$. »

Recherche 1 - 21

Retrouver parmi les expressions suivantes celles qui correspondent à des développements de carrés :

$$A(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$B(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$C(x) = x^2 + 3x + 9$$

$$D(x) = 4x^2 + 12x + 9$$

Recherche 1 - 22

Soit l'expression $f(x) = -x^2 + \frac{6}{x}$.

Calculer l'expression pour les valeurs suivantes :

$$\bullet x = 3;$$

$$\bullet x = \sqrt{3};$$

$$\bullet x = -2;$$

$$\bullet x = \frac{3}{2}.$$

Recherche 1 - 23

Vérifier que les trois expressions suivantes correspondent à une même expression :

$$x(2x-1)-3; \quad (2x-3)(x+1); \quad 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

Recherche 1 - 24

1. Vérifier les égalités suivantes : $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$ et $\sqrt{11-6\sqrt{6}} = 3-\sqrt{2}$.

2. Calculer : $A = 3\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} - \sqrt{11-6\sqrt{6}} = 3-\sqrt{2}$.

Order

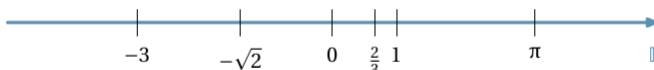


1

Ordre dans $\mathbb{R}$ **1 1 Découverte du problème**

Mathémator : Vous vous souvenez, cher disciple, que l'on peut représenter les nombres réels sur une droite orientée munie d'un repère :

Secondix: Oui ! Nous avons vu ça dans le chapitre précédent. Comme mon cours est très bien ordonné, je retrouve tout de suite la figure que nous avons tracée :



Mathémator : Tous les réels correspondent aux abscisses de cette droite et vice versa. Comment pourriez-vous classer les abscisses des points de cette droite ?

Secondix: Ben, comme il y a une flèche au bout, je dirais qu'on va du plus petit au plus grand en partant de la gauche vers la droite.

Mathémator : C'est l'idée mais il faudrait quelque chose de plus rigoureux pour pouvoir se débrouiller en calcul algébrique, c'est-à-dire avec des nombres a priori inconnus.

Secondix: Pfff... vous allez encore couper les cheveux en quatre et tout compliquer !

Mathémator : Mon petit Secondix, si vous ne savez pas exactement de quoi vous parlez, vous risquez de dire beaucoup de grosses bêtises. Et si vous n'avez pas de repères solides qu'on appelle les *définitions*, vous allez vous perdre dans le labyrinthe de la Science. Mais je veux vous faire plaisir et nous n'allons pas remonter à l'origine de la connaissance humaine : nous supposons que vous savez ce que signifie, pour un nombre, être positif ou négatif.

Secondix (à part): *Il me prend vraiment pour un idiot (tout haut)* Je crois que c'est à ma portée, Maître.

Mathémator : Fort bien, alors énonçons notre première définition qui servira de socle à tout ce chapitre :

Définition 2 - 1**comparaison de deux nombres réels**

Deux nombres a et b vérifient l'inéquation $a < b$ si, et seulement si, $a - b$ est négatif ou $b - a$ est positif.

Comparer deux nombres c'est étudier le signe de leur différence.

Secondix: Excusez-moi mais là, c'est vraiment de la torture gratuite de disciple. Je sais que 2 est plus petit que 3, je n'ai pas besoin de passer par votre définition alambiquée.

Mathémator : Tout doux mon jeune ami ! Prenez le temps de réfléchir avant d'émettre un jugement si radical.

1 2 Théorèmes de rangement**Recherche****comment ranger des carrés ?**

Considérons deux nombres quelconques a et b vérifiant $a < b$: comment sont rangés leurs carrés ?

Secondix: Par exemple, $2 < 3$ et $2^2 < 3^2$: ils sont rangés dans le même sens.

Mathémator : Mais $-3 < -2$ et cependant $(-3)^2 > (-2)^2$... Des exemples ne suffisent pas à conclure : que pensez-vous de -1 et 2 ? De -2 et 1 ?

Secondix: Oui mais s'ils sont tous positifs, ça marche.

Mathémator : Dois-je vous croire sur parole ? Il me faudrait une preuve car le terrain semble miné.

Suivons votre idée et considérons deux nombres **positifs** a et b tels que $a < b$. Pour comparer leurs carrés il faudrait, d'après notre définition, étudier le signe de leur différence. Allons-y !

Vous savez que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or a et b sont positifs donc $a + b$ l'est aussi.

De plus $a < b$ donc $a - b$ est négatif.

Ainsi, $a^2 - b^2$ est le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif.

Théorème 2 - 1

règle des signes (admise)

Le produit de deux nombres de même signe est positif.

Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.

D'après la règle des signes, $a^2 - b^2$ est donc négatif, c'est-à-dire que $a^2 < b^2$.

Nous venons donc de *démontrer* que deux nombres *positifs quelconques* et leurs carrés sont rangés *dans le même ordre*.

Je vous laisse démontrer ce qui se passe pour deux nombres négatifs à titre d'exercice.

Secondix: Et s'ils ne sont pas de même signe ?

Mathémator : nous avons vu sur un exemple que la conclusion n'est pas aussi simple. Nous nous contenterons donc de comparer des carrés de nombres de même signe.

Théorème 2 - 2

rangement des carrés

Deux nombres *positifs* et leurs carrés sont rangés *dans le même ordre*.

Deux nombres *négatifs* et leurs carrés sont rangés *dans l'ordre inverse*.

Pour ne pas que vous perdiez la main, vous démontrerez également à titre d'exercice le théorème suivant :

Théorème 2 - 3

rangement des inverses

Deux nombres non nuls et de même signe et leurs inverses sont rangés *dans l'ordre inverse*.

Secondix (à part): *le sale boulot, c'est toujours pour les mêmes... (tout haut)* Ce sera un plaisir, ô astre de la connaissance.

1 3 Ordre et opérations

Mathémator : Vous êtes plus léger qu'un gorille adulte.

Secondix: J'ai en effet surveillé mon alimentation ces derniers temps.

Mathémator : Bien ! Supposons qu'on vous mette dans les bras chacun un poids de 10kg : serez-vous toujours le plus léger ?

Secondix (à part): *Je me méfies de ses questions tordues (tout haut)* je pense que oui.

Mathémator : On doit pouvoir énoncer quelque chose de semblable pour les nombres :

Théorème 2 - 4

addition d'un nombre aux deux membres d'une inégalité

Soit a , b et c trois nombres réels quelconques ; si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

Ce qui signifie qu'ajouter *un même nombre* (positif ou négatif) aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité.

Secondix: Bon ben voilà.

Mathémator : Pas si vite jeune disciple ! Notre illustration zoologique n'est pas une preuve : on pourrait être trompé par des images...

Notre seule arme à disposition est la définition 4 - 1 page 18. Nous voulons *comparer* $a + c$ et $b + c$: il s'agit d'*étudier le signe* de leur différence. Allez-y !

Secondix : J'essaye : $a + c - b + c$.

Mathémator : STOP ! Vous oubliez les parenthèses : on doit retrancher le nombre $(b + c)$ au nombre $(a + c)$.

Secondix (à part) : *Comment fait-il pour savoir oralement que j'ai oublié les parenthèses ? (tout haut)* Certes Maître, je reprends : $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b + c - c = a - b$ euh... ah ! On sait que $a < b$ donc $a - b$ est négatif. Or $a - b = (a + c) - (b + c)$ donc $(a + c) - (b + c)$ est négatif aussi ce qui signifie que $a + c < b + c$.

Mathémator : Vous venez de mener brillamment votre première démonstration en algèbre !

Secondix : J'en suis tout bouleversé !

Mathémator : Afin de ménager vos émotions, nous allons nous contenter d'énoncer les théorèmes suivants et vous les démontrerez à titre d'exercice.

Nous avons additionné, il ne reste plus qu'à multiplier...

Secondix : Ben c'est pareil : si un élève de 2^{nde} est plus léger qu'un gorille alors dix élèves de 2^{nde} sont plus légers que dix gorilles.

Mathémator : Belle image, certes, mais qui peut être trompeuse : on a $2 < 3$ mais est-ce que $2 \times (-1) < 3 \times (-1)$? Soyons donc prudents avec les illustrations...

multiplication des deux membres d'une inégalité par un nombre

Soit trois nombres réels a , b et c tels que $a < b$ et $c \neq 0$.

- si c est *positif* alors $a \cdot c < b \cdot c$;
- si c est *négatif* alors $a \cdot c > b \cdot c$

Théorème 2 - 5

Autrement dit :

- multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre *positif* ne change pas le sens de cette inégalité ;
- multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre *négatif* change le sens de cette inégalité.

Comme tout à l'heure, vous étudierez le signe d'une différence.

Secondix : Pourquoi avoir précisé $c \neq 0$?

Mathémator : Cherchez la réponse : elle est cachée dans votre brillant cerveau... Mais passons à autre chose.

Idée

division par un même nombre Une division est une multiplication par l'inverse donc la division membre à membre suit les mêmes règles que la multiplication membre à membre.

Maintenant, pour vous faire plaisir, reprenons un petit exemple : vous êtes plus léger qu'un gorille et votre sœur est plus légère qu'une baleine donc vous et votre sœur êtes

plus légers qu'un gorille et une baleine réunis.

addition membre à membre

Soit a , b , c et d quatre nombres réels. Alors

Théorème 2 - 6

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array} \right\} \implies a + c < b + d$$

ce qui signifie qu'en additionnant membre à membre deux inégalités on n'en change pas le sens.

Pour le dernier théorème, nous ne donnerons pas de démonstration car elle est plus difficile et je ne voudrais pas vous décourager donc nous l'admettrons exceptionnellement..

Secondix (à part): *Enfin une bonne nouvelle (tout haut)* ah quel dommage !

Mathémator : Vous pouvez toujours vous y frottez si ça vous chante...

multiplication membre à membre

Soit a , b , c et d quatre nombres réels POSITIFS. Alors

Théorème 2 - 7

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array} \right\} \implies a \cdot c < b \cdot d$$

ce qui signifie qu'en multipliant membre à membre deux inégalités entre nombres POSITIFS on n'en change pas le sens.

Vous aurez noté l'importance du terme POSITIF. Essayez avec $-2 < 5$ et $-3 < -1$...

Il nous reste un dernier théorème pour la route que *vous démontrerez* également :

comparaison à 1

Soit a et b deux nombres réels avec $b \neq 0$.

Théorème 2 - 8

- si a et b sont POSITIFS, $a < b \iff \frac{a}{b} < 1$;
- si a et b sont NÉGATIFS, $a < b \iff \frac{a}{b} > 1$

2 Intervalles

2 1 Définition

Mathémator : Nous avons déjà parlé des ensembles de nombres $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. Cependant, nous pouvons être amenés à parler d'une partie seulement d'un de ces ensembles. Par exemple, quand il y a un nombre fini d'éléments, on utilise des accolades :

$$\{1, 2, 4, \sqrt{37}\}$$

est l'ensemble constitué des quatre nombres 1, 2, 4 et $\sqrt{37}$.

Cette façon de décrire un ensemble de nombres peut s'avérer inutilisable dans certains cas. Par exemple, peut-on donner la liste de TOUS les nombres réels entre -3 et 2 ?

Secondix: euh...

Mathémator : rappelez-vous qu'on ne peut même pas parler de *successeur* d'un réel. S'il existait un plus petit réel supérieur à -3 , alors il suffirait de considérer le milieu de -3 et de ce nombre : il est réel et est plus petit que le soi-disant plus petit ce qui est impossible.

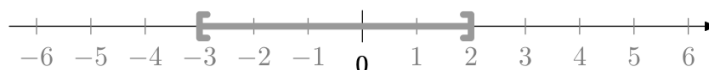
Secondix (à part): *qu'est-ce que c'est que ce délire ? (tout haut)* Si vous le dites...

Mathémator : comme on ne peut pas faire la liste de tous les nombres compris entre -3 et 2 , on va reprendre l'image de la DROITE des réels.

Rappelez-vous : soit deux points distincts A et B d'une droite ; comment appelle-t-on l'ensemble des points de la droite situés entre A et B ?

Secondix: Ça je sais ! C'est le segment de droite $[AB]$: on le note avec des crochets.

Mathémator : Et bien on va utiliser la même notation avec les nombres mais au lieu de parler de *segment* $[-3; 2]$ on dira *intervalle* $[-3; 2]$.



Secondix: Ah oui : quand il y a une infinité de nombres, on utilise des crochets.

Mathémator : non : ce n'est pas si simple.

Secondix (à part): *Ça m'aurait étonné... (tout haut)* Ben pourtant dans $[-3; 2]$ il y a une infinité de nombres et dans $\{-3; 2\}$ il n'y a que les deux nombres -3 et 2 si j'ai bien compris.

Mathémator : vous avez bien compris mais on peut utiliser des accolades même avec une infinité de nombres. Plus troublant, on peut décrire l'intervalle $[-3; 2]$ à l'aide d'accolades...

$$[-3; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$$

ce qui signifie : « l'intervalle $[-3; 2]$ est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $-3 \leq x \leq 2$ », c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels compris entre -3 et 2 .

Secondix (à part): *Qu'est-ce que c'est que c't'embrouille (tout haut)* Bon ben c'est quoi alors un intervalle ? !

Mathémator : Je vais vous donner la définition officielle mais je vais d'abord vous en donner un petit truc qui est très pratique pour comprendre ce qu'est un intervalle (il faudra garder ça entre nous...)

Idée

Définition intuitive d'un intervalle Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de trou...

Secondix (à part): *C'est plutôt lui qui a un trou dans le cerveau (tout haut)* « qui n'a pas de trou » ??

Mathémator : Eh oui ! Par exemple l'ensemble $\{-3; 2\}$ a un trou puisqu'il manque tous les nombres entre -3 et 2 . $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a aussi un trou puisqu'il manque 0 . Voici la définition :

intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ d'un des 10 types suivants, les bornes a et b étant des réels.

1^{er} cas : $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$, c'est-à-dire tous les nombres réels ;

2^e cas : $\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble vide ;

Autres cas : l'une des huit situations suivantes

Définition 2 - 2

	Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
Intervalles bornés	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
	$[a; b[$	$a \leq x < b$	
	$]a; b]$	$a < x \leq b$	
	$]a; b[$	$a < x < b$	
Intervalles non bornés	$] - \infty; b]$	$x \leq b$	
	$] - \infty; b[$	$x < b$	
	$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
	$]a; +\infty[$	$a < x$	

Rajoutons un peu de vocabulaire :

vocabulaire

- $[a; b]$, $]a; b[$, $]a; b]$, et $[a; b[$ sont des **intervalles bornés** ;
- les réels a et b sont les **bornes** de l'intervalle ;
- $b - a$ est l'**amplitude** de l'intervalle $[a; b]$;
- $\frac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle ;
- $[a; b]$ est un intervalle **fermé** ;
- $]a; b[$ est un intervalle **ouvert** ;
- $]a; b]$ est un intervalle **ouvert en a et fermé en b**.

Définition 2 - 3

2 2 Réunion et intersection

Mathémator : Ces différents types d'intervalles ne vont pas suffire pour décrire tous les ensembles de nombres que nous allons rencontrer cette année. Par exemple, on voudrait caractériser les nombres qui sont inférieurs à -3 ou supérieurs à 2 .

Secondix: Ben c'est l'intervalle $] - \infty; -3]$ plus l'intervalle $[2; +\infty[$

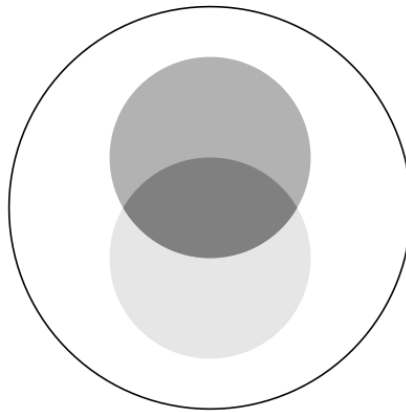
Mathémator : C'est l'idée mais votre « plus » prête à confusion : qu'est-ce qu'on additionne ? Les bornes ? Les éléments des intervalles ? Qu'est-ce qu'une addition d'intervalles ? Je vois bien ce que vous voulez dire mais vous n'êtes pas assez précis.

Faisons un petit voyage dans le temps et considérons votre classe de CP.

Il y avait Alain, Bernard, Corine, Daniel, Élisabeth, Monique, Robert, Henriette, Isabelle et Jacques. Parmi eux, seuls Bernard, Élisabeth, Henriette et Jacques portaient des lunettes.

Appelons G l'ensemble des garçons et L l'ensemble des enfants à lunettes.

Représentez la classe de CP en complétant les patates suivantes :



Quel est l'ensemble contenant les garçons et les enfants à lunettes ?

Secondix : C'est les élèves qui sont dans G ou dans L mais il n'a pas encore de nom.

Mathémator : C'est cela. Nous allons lui en donner un officiel. On dira que c'est *la réunion* de G et L . On la notera $G \cup L$ et on lira « G union L ».

Pour les intervalles, c'est la même idée car il s'agit d'ensembles avant tout.

Définition 2 - 4

réunion d'intervalle

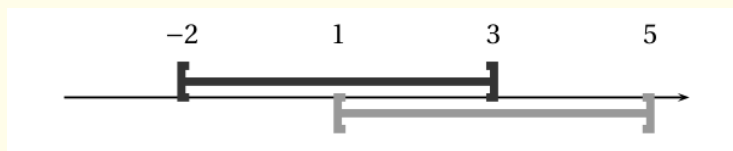
La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **OU** à l'autre des deux intervalles.

La réunion des intervalles $[-2 ; 3]$ et $[1 ; 5]$ est l'ensemble des réels x qui vérifient : $-2 \leq x \leq 3$ OU $1 \leq x \leq 5$.

C'est l'ensemble des réels x tels que : $-2 \leq x \leq 5$ soit l'intervalle $[-2 ; 5]$.

Graphiquement, cela correspond à la partie de la droite graduée qui est hachurée au moins une fois.

Exemple



Maintenant, si l'on veut décrire l'ensemble des garçons à lunettes...

Secondix : c'est l'ensemble des enfants qui sont à la fois dans F et dans L . Je suppose qu'il va porter un nom spécial.

Mathémator : Oui ! On dira simplement que c'est *l'intersection* de G et L . On la notera $G \cap L$ et on lira « G inter L ».

Pour les intervalles, c'est encore la même idée.

Définition 2 - 5

intersection d'intervalle

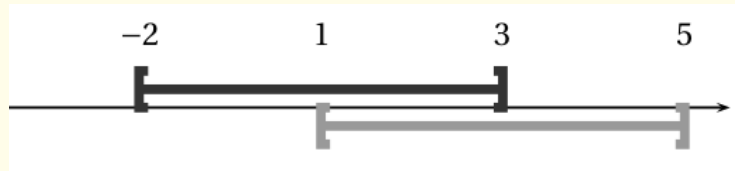
L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **ET** à l'autre des deux intervalles.

Exemple

L'intersection des intervalles $[-2 ; 3]$ et $[1 ; 5]$ est l'ensemble des réels x qui vérifient : $-2 \leq x \leq 3$ ET $1 \leq x \leq 5$.

C'est l'ensemble des réels x tels que : $1 \leq x \leq 3$ soit l'intervalle $[1 ; 3]$.

Graphiquement, cela correspond à la partie de la droite graduée qui est hachurée deux fois.



2 3 Première application : résolution d'inéquations linéaires

Mathémator : Nous allons à présent utiliser tout ce que nous venons de (re)voir pour résoudre une inéquation linéaire, c'est-à-dire où l'inconnue x intervient dans une expression du type ax .

Exemple

inéquation linéaire

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3(x - 3) < 4$

Secondix: Ce n'est pas tout à fait le type d'expression annoncée...

Mathémator : Il ne faut pas se laisser tromper par les apparences ! $-3(x - 3) = -3x + 9$: l'inconnue x n'est en fait que multipliée par un nombre constant.

Secondix: Bah, c'est toujours comme ça alors.

Mathémator : Une nouvelle fois vous parlez avant de réfléchir ! Par exemple, l'inéquation $3x^3 + \sqrt{x} + 3x + 2 < 4$ n'est pas linéaire en x car x est élevé au cube, on en prend la racine carrée : c'est beaucoup plus compliqué à étudier...

Secondix: Et puis « résoudre dans $\mathbb{R}$ », ça veut dire quoi au juste ?

Mathémator : Résoudre une inéquation dans un ensemble, c'est trouver les nombres appartenant à cet ensemble qui vérifient l'inéquation, c'est-à-dire qui la rendent vraie quand on remplace l'inconnue par l'un d'entre eux.

À la fin d'une inéquation, il faudra donc donner un *ensemble de solutions*.

$$\begin{array}{lcl}
 -3(x - 3) > 4 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \times (-\frac{1}{3}) \text{ qui est négatif} \\
 x - 3 < -\frac{4}{3} & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & \\
 x < -\frac{13}{3} & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & +3
 \end{array}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est $S =]-\infty ; -\frac{13}{3}[$

Occupons-nous à présent d'un cas un peu plus compliqué.

Recherche

système d'inéquations linéaires à une inconnue

Résolvez dans $\mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} -2(t + 1) \leq 5t - 1 \\ 3\left(t + \frac{2}{3}\right) < t + 6 \end{cases}$$

Il s'agit de trouver les valeurs du réel t qui vérifient *à la fois* les deux inéquations. Occupez-vous de chacune séparément et nous regrouperons les résultats.

Secondix: Je suis prêt, Maître :

$$\begin{array}{lcl}
 -2(t+1) \leq 5t-1 & & \\
 -2t-2 \leq 5t-1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} +2 & \\
 -2t \leq 5t+1 & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \\
 -7t \leq 1 & \xleftarrow{\quad\quad\quad} -5t & \\
 t \geq -\frac{1}{7} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} \times(-\frac{1}{7}) &
 \end{array}$$

$$S_1 = \left[-\frac{1}{7}; +\infty \right[$$

$$3\left(t + \frac{2}{3}\right) < t + 8$$

$$\begin{array}{lcl}
 & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\
 & & \xleftarrow{\quad\quad\quad} \\
 & & \xleftarrow{\quad\quad\quad} \\
 t & \xleftarrow{\quad\quad\quad} &
 \end{array}$$

$$S_2 =$$

L'inconnue t doit donc être à la fois dans les deux ensembles : $S = S_1 \cap S_2 =$

3

Naissance de l'Algèbre

Voici notre héros :



FIGURE 2.1 – Al
Khwarizmi
(780 - 850)

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي

...ou si vous préférez Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.

Son livre le plus célèbre, qu'il a écrit entre 813 et 833 alors qu'il travaillait à *la maison de la sagesse* de Bagdad, se nomme :

الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة



c'est-à-dire Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab *al-jabr* wa-l-muqabala
ou bien encore :

L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

- Pas de notations ni de nombres ! Tous les nombres et calculs sont décrits par des phrases :
- nombres (*dirham*) ;
- racines (*jidhr*, *ce qui est caché...*)
- choses (*shay* transposé en espagnol *Xay* qui a donné notre x)
- biens (« *mâl* » en arabe) carrés des racines.

Al-jabr signifie réduction, au sens de « réduction d'une fracture ». « *Algebrista* » est d'ailleurs entré dans la langue espagnole pour désigner un rebouteux.

L'al-jabr consiste à réduire l'équation en éliminant les soustractions par addition de termes dans les deux membres.

En effet, à l'époque d'Al-Khwarizmi, on ne travaillait qu'avec des entiers positifs.

Par exemple :

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

est transformé, par al-jabr, en

$$x^2 + 4x^2 = 40x$$

puis

$$5x^2 = 40x$$

En effet, Al-Khawarizmi nomme les termes soustraits (comme $4x^2$ dans l'exemple précédent) : *nâqis*, « terme enlevé ».

Le même mot est employé pour désigner le membre manquant d'un amputé.

Al-jabr consiste donc à restaurer ce qui est manquant dans une équation.

Al-muqabala signifie « confrontation ».

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

contient des carrés dans les deux membres, chaque membre est pourtant une somme.

Al-muqabala consiste donc à soustraire une quantité afin que des quantités de même type (*dirham*, racine ou carré) ne puissent se trouver à la fois dans les deux membres de l'équation. Dans

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

on soustrait x^2 pour obtenir

$$5 = 40x + 3x^2$$

On retrouve alors un des six types d'équations qu'Al-Khwarizmi a étudié. Une méthode de résolution générale de chaque type était proposée ainsi qu'une démonstration, souvent géométrique. Voici un problème proposé par Al-Khwarizmi :

Un bien et dix de ses racines égale trente-neuf dirhams.

Il y a une autre figure qui mène également à cela et c'est : la surface (AB), étant le bien, nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous divisons par deux les dix, elles deviennent cinq, nous les transformons en deux surfaces sur les flancs de la surface (AB), et ce sont les deux surfaces (J), (N). La longueur de chacune des deux surfaces est cinq coudées -et c'est la moitié des dix racines- et sa largeur est comme le côté de la surface (AB). Il nous reste alors un carré dans l'angle de la surface (AB), et c'est cinq par cinq, et c'est la moitié des dix racines

que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface. Or nous savons que la première surface est le bien et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont dix racines. Tout cela est donc trente neuf, et il reste pour compléter la surface la plus grande, un carré de cinq par cinq, et c'est vingt-cinq. Nous l'ajoutons à trente neuf afin que se complète la surface la plus grande, et c'est la surface (DE). Tout cela vaudra soixante-quatre. Nous prenons sa racine, et c'est huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si nous lui retranchons l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté -et c'est cinq- il reste trois, et c'est le côté de la surface (AB) qui est le bien, et c'est sa racine; et le bien est neuf.

Recherche

Faites un joli dessin et réfléchissez à la méthode proposée par Al.
Essayez ensuite avec $x^2 + 6x = 40$ puis avec $x^2 + 6x = -10$...

Nous venons de voir qu'Al-Khwarizmi n'utilisait pas de notations spéciales pour désigner les équations qu'il résolvait.

Il a fallu des siècles pour arriver au stade actuel.

- DIOPHANTE, III^e siècle : $\Delta^{\Upsilon} \delta \zeta \gamma \epsilon \sigma \tau \iota \iota$
- Nicolas CHUQUET, fin XV^e siècle : $4^2 \text{ p } 3^1 \text{ egault } 10^0$
- TARTAGLIA, début XVI^e : $4q \text{ p } 3R \text{ equale } 10N$
- Simon STÉVIN, fin XVI^e : $4\textcircled{2} + 3\textcircled{1} \text{ egales } 10\textcircled{0}$
- François VIÈTE, vers 1600 : $4 \text{ in } A \text{ quad } + 3 \text{ in } A \text{ æquatur } 10$
- René DESCARTES, vers 1640 : $4xx + 3x \propto 10$
- Guillaume CONNAN, vers 2016 : $4x^2 + 3x = 10$

Vous remarquez donc que les notations sont relativement récentes mais on sait résoudre des équations depuis des millénaires : il ne faut pas confondre mathématiques et notations ni littérature et alphabet...

4

Exercices

Recherche 2 - 1

Comparer les nombres suivants en utilisant la méthode vue en cours :

1. $12x^2 + 7$ et $6x^2 + 5$;
3. $\frac{12}{7}$ et $\frac{7}{4}$;
5. $\frac{9,01}{10^{53}}$ et $\frac{90,11}{10^{54}}$;
2. $5x + 7$ et $-3 + 5x$;
4. $\frac{127}{57}$ et $\frac{48}{57}$;
6. $\frac{10^{35}}{10,01}$ et 10^{34} ;

Recherche 2 - 2

Soient x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x < y$. Comparer les nombres suivants en précisant à chaque étape la propriété utilisée :

1. $7x - 5$ et $7y - 5$;
4. $\frac{7}{x}$ et $\frac{7}{y}$;
7. $\frac{7x}{4} - 5$ et $\frac{7y}{4} + 1$;
2. $-5x + 4$ et $-5y$;
5. $x^2 - 1$ et $y^2 - 1$;
8. $\frac{-15x}{7}$ et $\frac{-15y - 8}{7}$;
3. $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$;
6. $\frac{-3x}{13}$ et $\frac{-3y}{13}$;

Recherche 2 - 3

Soit a un nombre positif. Le but de cet exercice est de comparer a , a^2 et a^3 . Nous commencerons par observer quelques exemples avant de démontrer la règle générale.

1. Ordonner a , a^2 et a^3 pour les valeurs de a suivantes : $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,5$; $a_3 = 1$; $a_4 = 5$; $a_6 = 12$.

2. Les réponses sont-elles les mêmes pour toutes les valeurs précédentes ? Autour de quelle valeur de a y a-t-il un changement ?
3. On suppose $a > 1$. En utilisant un critère adapté, ordonner a et a^2 , puis a^2 et a^3 .
4. On suppose cette fois-ci $a < 1$. En utilisant un critère bien adapté, ordonner a et a^2 , puis a^2 et a^3 .
5. Que se passe-t-il pour $a = 1$? En déduire la règle générale sur l'ordre de a , a^2 et a^3 .

Recherche 2 - 4

Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui définissent des intervalles de $\mathbb{R}$? Donner, quand cela est possible, la notation correspondante.

1. Tous les nombres réels strictement plus petits que 15.
2. Tous les entiers pairs.
3. Tous les nombres réels strictement compris entre -5 et 0 .
4. Tous les nombres réels dont la valeur absolue vaut $5, 2$.
5. Tous les nombres réels positifs ou nuls.
6. Tous les entiers compris entre $2, 4$ inclus et $11, 8$ exclus.
7. Tous les nombres réels dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $1, 3$.
8. Tous les nombres réels dont la valeur absolue est supérieure ou égale à $1, 3$.

Recherche 2 - 5

La vitesse de la lumière est de $2,99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Lors d'une expérience, on a établi que le temps nécessaire à la lumière pour aller de la Terre à la Lune est de $1,285 \text{ s}$ à $0,005 \text{ s}$ près.

Donner un encadrement de la distance Terre-Lune.

NB : la précision de cette distance est de nos jours inférieure au mm , ce qui nous permet de savoir que la Lune s'éloigne d'e

Recherche 2 - 6

On donne ci-dessous 8 inéquations :

- | | | |
|-------------------|---------------------------|-----------------|
| — $-2 < x < 4$; | — $0 \leq x < 3,8$; | — $x > 0$; |
| — $x \geq -2,5$; | — $-3 \leq x \leq -0,5$; | — $x \geq -3$. |

1. Donner l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par chaque inéquation.
2. Représenter graphiquement chacun des intervalles précédents.

Recherche 2 - 7

On considère les nombres réels suivants : 2 ; -2 ; 0 ; $-\frac{16}{3}$; 18 ; 7 ; $6,99$; $-2,1$; 1 .

1. Lesquels de ces nombres sont inclus dans l'intervalle $[-2; 7[$?
2. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $] -\infty; -2]$?
3. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]0; 7]$.

Recherche 2 - 8

On considère les nombres réels suivants : 2 ; -2 ; 0 ; $-\frac{16}{3}$; 18 ; 7 ; $6,99$; $-2,1$; 1 .

1. Lesquels de ces nombres sont inclus dans l'intervalle $[-2; 7[$?
2. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $] -\infty; -2]$?
3. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]0; 7]$.

Recherche 2 - 9

Trouver deux nombres décimaux appartenant à l'intervalle $[\frac{17}{3}; \frac{18}{3}[$, puis deux autres dans l'intervalle $] - 12, 78; -12, 77[$.

Recherche 2 - 10

Représenter graphiquement l'intersection des intervalles $[-2; 5]$, $] - 1, 4; 6]$ et $[-4; 4[$. Donner ensuite sa notation en intervalle et l'égalité à laquelle il correspond.

Recherche 2 - 11

1. On donne les intervalles $I =] - 3; 3]$ et $J =] - \infty; 1]$

i. Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $-\pi \dots\dots\dots I$ $\sqrt{2} - 1 \dots\dots\dots J$

ii. Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur une droite graduée :

iii. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$

2. On donne les intervalles $I =] - 1; 4[$ et $J = [-3; +\infty[$

i. Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur une droite graduée :

ii. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$

Recherche 2 - 12

Build a table which summarize the sign of the following expressions, showing the computations leading to the critical values and involving test values.

- | | | | |
|----------------|-------------------------|-------------------------|----------------------|
| 1. $2x - 5$; | 3. $\frac{3}{7}x - 2$; | 5. $7 - \frac{2}{3}x$; | 7. $2 + \sqrt{2}x$; |
| 2. $-3x + 4$; | 4. $-2 - 12x$; | 6. $-3 + 3x$. | 8. $-3x + 7$. |

Recherche 2 - 13

In this exercise we will extend the method of the signe table to products of linear expressions.

- Give the signs of the expressions $3x - 15$ and $-5x - 7$ in a sign table.
- Use the previous question to copy and fill the next table.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	5	$+\infty$
$3x - 15$				
$-5x - 7$				

- Add a row to the new table where you will show the sign of the product $(3x - 15)(-5x - 7)$ over each interval.
- Use the last row of the table to solve the inequations $(3x - 15)(-5x - 7) > 0$ and $(3x - 15)(-5x - 7) \leq 0$.

Recherche 2 - 14

A dictator has bought 48 meters of fence to build a rectangular enclosure for his prime minister. Let x be the length of the smallest side of the enclosure and y the length of the longest side.

- Prove that $y = 24 - x$.
- Compute the area of the enclosure as a function of x .

The dictator wants the enclosure to have an area of at least 135 square meters. He wants to know what are the possible lengths for the sides to do so.

- What inequation must we solve to answer to this problem?
- Check that this inequation is equivalent to $(x - 15)(x - 9) \leq 0$.

5. Solve this new inequation using a sign table.
6. Conclude.

Recherche 2 - 15

A company is building items in large quantities. Let x be the number of thousands of items built. Each item is sold at the price of £15 per unit. We call $S(x)$ the total of the sales, in thousand of euros.

1.
 - i. Compute $S(1)$, $S(2)$ and $S(3)$.
 - ii. Find the general formula for $S(x)$.
2. The cost of fabrication of x thousand of items has been proved to be close to $C(x) = 25x^2 - 85x + 75$.
 - i. Prove that the balance of the company is equal to $B(x) = 25x^2 - 100x + 75$.
 - ii. Prove that $B(x) = 25(x - 1)(x - 3)$.
 - iii. What equation must we solve to find out for how many items the company will have a positive balance?
 - iv. Solve this equation using a sign table.

3 Functions



À la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :

- traduire le lien entre deux quantités par une formule ;
- pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule :
 - identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;
 - déterminer l'image d'un nombre ;
 - rechercher des antécédents d'un nombre ;
- résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$.

1

Teaser...

Pour définir une fonction, il faut un ensemble de départ (un type quoi) et un ensemble d'arrivée (le même type ou un autre). Une fonction associe à chaque élément du type de départ AU PLUS UN ÉLÉMENT du type d'arrivée.

En fait, une fonction c'est une *flèche* entre deux types

Un exemple de fonction



Exemple

Loosely speaking, a function is a rule that, for each element in some set D of possible inputs, assigns a possible output. The output is said to be the *image* of the input under the function and the input is a *pre-image* of the input. The set D of possible inputs is called the *domain* of the function.

For a function named f , the image of q under f is denoted by $f(q)$, we say that q maps to r under f . The notation for « q maps to r » is $q \mapsto r$.

It is convenient when specifying a function to specify a *co-domain* for the function. The co-domain is a set for which the function's output values are chosen.

The notation

$$f : D \mapsto F$$

means that f is a function whose domain is the set D and whose co-domain (the set of possible outputs) is the set F . More briefly « a function from D to F » or « a function that maps D to F »

Par exemple, il existe une fonction Python qui prend en entrée un mot ou une phrase (ou plutôt une *chaîne de caractère* ou *string*) et renvoie sa longueur. Il s'agit de la fonction `len` :

```
1 In [13]: len("abcd")
2 Out[13]: 4
3
4 In [14]: len("")
5 Out[14]: 0
6
7 In [15]: len("I love Maths")
8 Out[15]: 12
```

Le domaine de `len` est l'ensemble des objets de type *string* et le co-domaine est l'ensemble des entiers positifs.

$$\text{len} : \text{String} \mapsto \text{PositiveInteger}$$

On peut créer ses propres fonctions. Par exemple, créons une fonction qui prend deux nombres en entrée et renvoie VRAI si le premier est strictement supérieur au second et FAUX sinon. Pour cela nous disposons d'un test pour savoir si un nombre est positif :

```
1 In [204]: 9 > 0
2 Out[204]: True
3
4 In [205]: -8 > 0
5 Out[205]: False
```

Alors on peut créer une fonction `est_superieur`

```
1 def est_superieur(a, b) :
2     return a - b > 0
```

et :

```
1 In [206]: est_superieur(5, 7)
2 Out[208]: False
3
4 In [209]: est_superieur(5, -7)
5 Out[209]: True
```

Le domaine de `est_superieur` est l'ensemble des couples d'entiers et le co-domaine est l'ensemble des *booléens* à savoir l'ensemble $\{\text{False}, \text{True}\}$

$$\text{est_superieur} : (\text{Integer}, \text{Integer}) \mapsto \text{Boolean}$$

2

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Mathémator : ce nom vous est familier...

Secondix: oui ! Au Collège, nous avons étudié les fonctions linéaires et les fonctions affines. Ça parle de droites, c'est ça ?

Mathémator : mmmmmouais... Il va falloir reprendre depuis le début ! Alors ouvrez un dictionnaire pour y regarder la définition de *fonction*.

Secondix: Ouh la la ! Il y en a des tonnes.

Mathémator : Regardez le quatrième paragraphe.

Secondix: alors...

4. FONCTION n.f. (de *fonction* 1 ; 1692) 1. *Math.* Grandeur variable dont la valeur dépend de celle qui est attribuée à une autre variable, dite *variable indépendante*. - 2. (1890) *Être fonction de* , dans la langue usuelle, se dit d'une chose dont la nature, le rôle, etc. dépendant d'une autre chose : *Le développement de l'enfant est fonction de l'établissement des connexions nerveuses.*)

Mathémator : Arrêtons-nous là ! Ces dates montrent que la notion mathématique date de la fin du XVII^e siècle (voir le petit aparté historique page 38) et que cette notion est entrée dans la langue usuelle deux siècles plus tard.

Secondix: une notion mathématique est passée dans le langage courant !

Mathémator : c'est en effet une notion assez naturelle : il est facilement compréhensible que la taille d'un enfant varie *en fonction de* son âge, que l'on prépare sa valise *en fonction de* la destination de son voyage, que la consommation d'une voiture varie *en fonction de* sa vitesse, etc.

D'ailleurs, nous ne donnerons pas une définition mathématiquement rigoureuse d'une fonction. Pour cela, il aurait fallu être habitué à la notion de *relation* entre des ensembles : vos parents y avaient été initiés dès la maternelle... En parler maintenant risquerait de vous traumatiser durablement.

Secondix: vous croyez que je suis plus bête que mes parents, c'est ça ?...

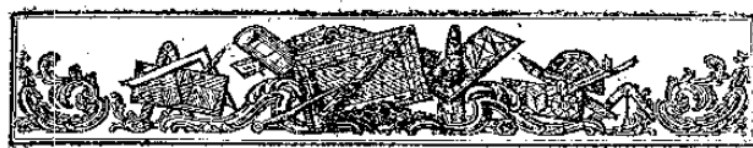
Mathémator : loin de moi cette idée. Le contenu des enseignements ayant changé, il faut adapter nos travaux d'approche. Nous reviendrons d'ailleurs à la notion originale, celle de LEIBNIZ, celle d'action, de mécanisme, de fonctionnement, de dépendance, bref une notion dynamique.

Fonction numérique d'une variable réelle

Définition 3 - 1

On appelle fonction numérique d'une variable réelle un « mécanisme mathématique » qui, à tout nombre appartenant à un certain ensemble appelé **domaine de définition de la fonction**, associe un nouveau nombre, appelé **image** du nombre initial.

LAGRANGE présenta cette idée d'une manière un peu plus sophistiquée comme nous pouvons le découvrir sur le texte de la figure suivante :



THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse.

1. ON appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x , nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f , ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

Nous ne pouvons vraiment définir la notion de « mécanisme » mais elle est assez parlante pour vous aider à comprendre ce qu'est une fonction.

Exemple

Considérons par exemple la fonction qui à tout nombre réel associe le carré de son double auquel on ajoute dix-huit. Calculez les images de 7, $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{3}$.

Secondix: voyons si j'ai bien compris : je pars de 7, je prends son double, c'est-à-dire 14, je l'élève au carré ce qui donne 196 puis j'ajoute 18 et j'obtiens 214. L'image de 7 par cette fonction est donc 214.

Mathémator : parfait ! Il ne reste plus qu'à traiter les autres cas.

Secondix: pas de problème !

—
 —
 —
 —

Mathémator : nous avons ici défini une fonction qui transforme n'importe quel nombre réel en un autre suivant un mécanisme décrit par une phrase.

Nous pouvons également décrire cette fonction en utilisant des notations mathématiques utilisées depuis qu'elles ont été introduites par LAGRANGE.

Détaillons *algébriquement* la transformation d'un nombre quelconque n :

- on prend le double de n qui devient donc $2n$;
- on élève ce double au carré : on obtient $(2n)^2$;
- on ajoute au nombre précédent 18 : on obtient finalement $(2n)^2 + 18$.

Ainsi, la fonction étudiée transforme un nombre réel quelconque n en $(2n)^2 + 18$.

Donnons un nom à cette fonction, par exemple φ .

Secondix: c'est quoi cette lettre ?

Mathémator : c'est la lettre grecque « phi »... comme fonction. Le choix de la lettre n'est pas important. On prend celle qu'on veut. On peut se mettre d'accord si vous voulez d'utiliser des lettres grecques pour les fonctions pour les distinguer des nombres désignés par des lettres romaines mais ce n'est pas obligatoire et il n'existe aucune règle générale. Sachez que quand LAGRANGE a introduit ses notations, il a utilisé f pour la fonction et x pour la variable et que cette habitude est restée mais ce n'est qu'une habitude.

Secondix: vous savez, moi et l'alphabet grec....

Mathémator : $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \rho \sigma \tau \upsilon \varphi \chi \psi \dots$

Revenons à notre problème. Il est d'usage d'écrire :

$$\varphi : n \longmapsto (2n)^2 + 18$$

la petite flèche traduisant l'idée dynamique de transformation d'un nombre en un autre. Notez que cette flèche commence avec un petit trait vertical. C'est une habitude pour la distinguer des autres types de relations désignés par des flèches.

On peut aussi préciser les ensembles avec lesquels on travaille :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ n &\longmapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

qui se lit : « la fonction φ qui va de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et qui à un nombre n associe le nombre $(2n)^2 + 18$.

Voici une variante :

$$n \xrightarrow{\varphi} (2n)^2 + 18$$

On a plutôt l'habitude d'écrire :

$$\varphi(n) = (2n)^2 + 18$$

Le « $\varphi(n)$ » se lisant « phi de n » et désignant l'image du nombre n par la fonction φ . Il ne faudra surtout pas confondre cette écriture avec une quelconque multiplication de φ par n . J'avoue que l'écriture est ambiguë mais le contexte nous permettra de distinguer les cas.

Par exemple, ici, on peut noter :

$$\varphi : 7 \mapsto 214$$

ou

$$7 \xrightarrow{\varphi} 214$$

ou encore

$$\varphi(7) = 214$$

Faites de même avec les deux autres exemples.

Idée

Un peu d'histoire... D'abord une date : 1692. C'est en effet cette année-là que Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) introduisit officiellement le terme de *fonction* du latin *functio* : accomplissement, exécution qui a donné en français *fonctionnement*. La notation que nous utilisons actuellement, à savoir $f(x)$ qui désigne l'image de x par la fonction f a été introduite un siècle plus tard par Joseph-Louis de LAGRANGE (1736-1813) dans sa « Théorie des fonctions analytiques » parue en 1797 dont vous pouvez voir un extrait figure ?? page ??.

Pendant longtemps, $f(x)$ désigna aussi bien une fonction que l'image d'un nombre x par cette fonction. À partir de 1940, suite au travail du groupe de mathématiciens français BOURBAKI, c'est f qui désigne la fonction et $f(x)$ ne désigne que l'image de x par la fonction f .

Au lieu de $f(x)$, on notait souvent avant LAGRANGE f_x l'image de x par la fonction f . Cette notation est restée aujourd'hui pour désigner un cas particulier de fonctions, les suites, que vous étudierez en classe de 1^{ère}. leibnizW. LEIBNIZ

Mathémator : avec nos notations, nous pouvons réécrire notre définition et préciser quelques notations :

fonction : notation et vocabulaire

Soit D_φ un ensemble. Une fonction φ est un « mécanisme mathématique » qui à tout nombre n appartenant à D_φ associe le nombre $\varphi(n)$ appelé **image** de n par φ . On note :

$$\begin{aligned} \varphi: D_\varphi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

On appelle D_φ l'**ensemble de définition** de φ .

Le nombre n est **UN antécédent** de $\varphi(n)$ par φ .

Définition 3 - 2

Différentes représentations d'une fonction

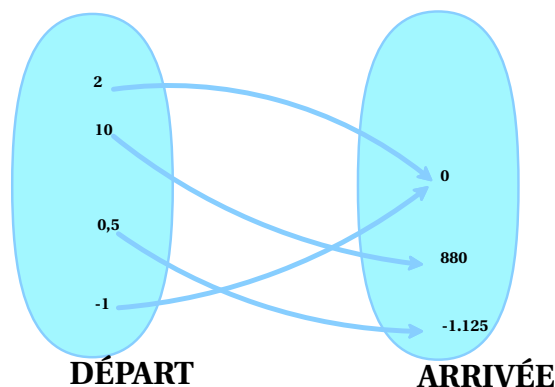
Étudions cette fois la fonction ψ qui à un nombre n associe $n \cdot (n+1) \cdot (n-2)$:

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{R} &\rightarrow [0; +\infty[\\ n &\mapsto n \cdot (n+1) \cdot (n-2)\end{aligned}$$

Par exemple, $\psi(2) = \dots$, $\psi(0,5) = \dots$, $\psi(-2) = \dots$

2 1 Diagramme sagittal

On peut représenter la situation à l'aide d'un *diagramme sagittal* :



Alors :

2 a pour image
 -1 a pour image
 0,5 a pour image
 -2 a pour image
 880 a pour antécédent
 -1,125 a pour antécédent
 0 a pour antécédent

2 2 Tableau de valeurs

On aurait pu opter pour un *tableau de valeurs* :

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi(n)$							

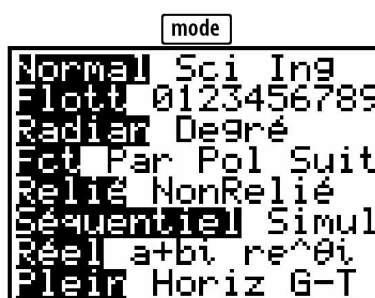
2 3 Utilisation de la machine

Ici les calculs peuvent être effectués de tête mais dans certains cas l'usage de la machine rendra bien des services.

Comment obtenir le tableau ci-dessus avec une TI ?

2 3 1 Avec les TI

Vérifier que vous êtes dans le bon mode en tapant sur  :



Taper ensuite sur $f(x)$ et entrer la fonction comme pour les CASIO :

x, t, θ, n () x, t, θ, n + 1) (x, t, θ, n - 2) entrer

$f(x)$

```

Graph1 Graph2 Graph3
\Y1=X^2+1
\Y2=X^3
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

```

Il s'agit ensuite d'effectuer quelques réglages en allant sur 2^{nde} [déf table] :

```

DEFINIR TABLE
DébTable=0
PasTable=
Valeurs:Auto Dem
Calculs:Auto Dem

```

Les deux premières lignes sont faciles à utiliser. Pour les deux dernières, on les réglera selon nos besoins.

Si on laisse en mode Auto, on a notre tableau avec un pas régulier :

X	Y1	
1	1	
1.1	1.231	
1.2	1.528	
1.3	1.897	
1.4	2.344	
1.5	2.875	
1.6	3.496	
X=1		

Le mode Dem est le mode manuel. En le mettant en surbrillance pour Valeurs, on obtient cet écran :

X	Y1	
X=		

Il suffit alors de taper dans la première colonne les valeurs des nombres dont on veut connaître l'image.

2 4 Représentation graphique**2 4 1 Lecture d'une courbe**

Exemple

Ivan IVANOV, un dissident Bordure, décide de passer clandestinement la frontière borduro-syldave en empruntant un tunnel construit par la résistance. Malheureusement, le réseau a été infiltré par la police Bordure qui a placé une balise GPS sur Ivan ce qui permet de suivre son cheminement. Voici le tracé obtenu par les Bordures qui donne à chaque instant l'altitude en mètres d' Ivan en fonction du temps t exprimé en minutes sachant que $t = 0$ correspond au passage de la frontière :

1 [[-10,10],[-8,3],[-4,12],[-2,0],[0,-10],[3,0],[5,8],[6,7],[8,12]],-11,9,-
11,13,14,10,1,1,1,1,3,["croix"]]

En utilisant ce graphique, répondez aux questions suivantes avec la précision permise par le tracé.

1. Combien de temps Ivan a-t-il passé sous terre ?
.....
2. Combien de temps a-t-il mis pour atteindre la frontière ?
.....
3. Combien de fois s'est-il trouvé à 11 mètres d'altitude ?
.....
4. À quel instant se trouvait-il à 12 mètres d'altitudes ?
.....
5. À quelle hauteur se trouvait-il 6 minutes après avoir passé la frontière ?
.....
6. Résumez le parcours d'Ivan dans un tableau où vous figurerez par une flèche vers le haut les périodes où Ivan a grimpé et par une flèche vers le bas les périodes où Ivan a descendu.
7. Résumez le parcours d'Ivan dans un tableau où vous figurerez par un + les périodes où Ivan a été au-dessus du niveau de la mer et par un - les périodes où Ivan a été en-dessous du niveau de la mer.

Voilà à quoi se résume ce qui vous est demandé de savoir faire en classe de 2^{nde} sur la lecture graphique...

2 4 2 Représentation graphique d'une fonction : un exemple

Exemple

Des savants syldaves ont mis au point une formule donnant la hauteur h du gazon du jardin du Guide Suprême en centimètres en fonction du temps t en année écoulé depuis la Grande Révolution :

$$h(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$$

1. Complétez le tableau suivant :

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25
$h(t)$																		

2. Placez dans le repère suivant les points de coordonnées $(t, h(t))$, en remplaçant t par les valeurs du tableau. Vous marquez les points par une croix :

1 0,5,9,13.5,14,5.5,1,1,.25,.5,[]

3. Que se passe-t-il à votre avis « entre les croix » ?

2 4 3 Représentation graphique d'une fonction : le cours

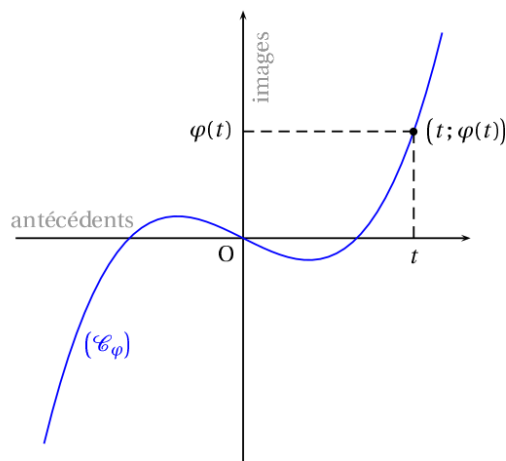
représentation graphique d'une fonction

Soit φ une fonction définie sur un ensemble D_φ et un repère (O, I, J) .

Définition 3 - 3

On appelle **représentation graphique de la fonction** φ l'ensemble des points de coordonnées $(t; \varphi(t))$, avec $t \in D_\varphi$.

On note souvent cet ensemble (C_φ)



Danger

Une courbe peut être... une droite. En effet, vous avez vu l'année dernière que la courbe représentative d'une fonction affine était une droite. Nous en reparlerons plus tard.

3**Résolution d'équations et d'inéquations****3 1 Résolution graphique d'équations**

Nous ne savons résoudre que très peu d'équations algébriquement (par le calcul). Par exemple, nous ne savons pas résoudre sur $[0; 4]$ l'équation :

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 = 11$$

Mais nous savons tracer à peu près la représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: [0; 4] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{aligned}$$

Nous savons aussi tracer la représentation graphique de la fonction :

$$\begin{aligned} \psi: [0; 4] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto 11 \end{aligned}$$

Regroupons les deux représentations sur un même graphique (il en manque une...) :

```
1 [x^3/3 - 2 * x^2 + 3 * x +
10, "bleu", [0, 4, "ff"]], //expression, couleur, optionnel(intervalle, bornes)0, 4.5, 9.5, 12, //xmi
-----debutdesoptions]//-----findesoptions
```

Un point situé à l'intersection de ces deux courbes... appartient à ces deux courbes donc ses coordonnées sont de la forme :

- d'une part $(t, \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10)$ car il appartient à (C_φ) ;
- d'autre part $(t, 11)$ car il appartient à (C_ψ) .

Alors $\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 = 11$ donc l'abscisse t de ce point est une solution de l'équation $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 = 11$

On peut donc lire les solutions de l'équation sur le graphiques : ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Ici, on trouve trois solutions : $x_1 \approx \dots$, $x_2 \approx \dots$ et $x_3 \approx \dots$.

3 2 Résolution graphique d'inéquations

C'est un peu le même problème que pour les équations. Reprenons l'exemple précédent. Nous ne savons toujours pas résoudre sur $[0; 4]$ l'inéquation :

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 \leq 11$$

Mais nous savons tracer à peu près la représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: [0; 4] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{aligned}$$

Nous savons aussi tracer la représentation graphique de la fonction :

$$\begin{aligned} \psi: [0; 4] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto 11 \end{aligned}$$

Regroupons les deux représentations sur un même graphique (il en manque toujours une...) et plaçons les trois solutions trouvées précédemment :

```
2 [x^3/3 - 2 * x^2 + 3 * x +
10, "bleu", [0, 4, "ff"]], //expression, couleur, optionnel(intervalle, bornes)0, 4.5, 9.5, 12, //xmi
-----debutdesoptions]//-----findesoptions
```

Un point de C_φ dont l'abscisse t est située dans l'intervalle $[0; x_1]$ est au-dessous du point de C_ψ ayant la même abscisse.

L'ordonnée $\varphi(t)$ du premier est donc inférieure à l'ordonnée $\psi(t)$ du second.

Ainsi, quelque soit $t \in [0; x_1]$, on a $\varphi(t) \leq \psi(t)$, c'est-à-dire $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 \leq 11$.

L'intervalle $[0; x_1]$ est donc inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Trouvez l'autre intervalle qui est inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Résolvez alors l'inéquation sur $[0; 4]$:

Ces méthodes de résolutions d'équations et d'inéquations présentent deux gros inconvénients :

- on n'obtient que des APPROXIMATIONS des solutions. Pour vérifier s'il s'agit réellement d'une solution exacte, il faut effectuer un calcul ;
- on ne peut lire que les approximations des solutions qui apparaissent dans la « fenêtre » affichée. On ne peut donc pas savoir s'il en existe d'autres ailleurs.

Cependant, ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir localiser à peu près des solutions d'équations et d'inéquations que nous ne savons pas (encore) résoudre algébriquement.

Danger

3 3 Résolution algébrique d'équations

Nous sommes en Seconde donc nous ne savons résoudre qu'un type d'équation :

$$ax + b = 0$$

N'oubliez pas que résoudre une équation, c'est trouver les éventuelles valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité.

On appelle ce genre d'équation une *équation du premier degré* car la plus haute puissance à laquelle est élevée l'inconnue est 1.

Si vous n'êtes pas confronté à une équation du premier degré, il faut tenter de s'y ramener.

Par exemple, soit f la fonction $x \mapsto x^2$. On cherche les antécédents éventuels de 5 par f . On doit donc résoudre l'équation $f(x) = 5$, c.a.d.

$$x^2 = 5$$

Ouh la la, mais c'est une équation du second degré, on ne sait pas faire, c'est un méchant prof qui nous pose des problèmes de 1ère...quoique...

Essayons de nous ramener à un cas connu. J'ai déjà été confronté à des expressions du second degré dans ma jeunesse...Bon sang ! Mais c'est bien sûr ! Les identités remarquables ! Ah, c'était le bon temps, on répétait bêtement des formules pendant des heures, sans chercher à réfléchir...

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

...Mais !...Cela nous permet de passer du second au premier degré ! Oui mais, quel rapport avec mon problème ?

$$x^2 = 5 \text{ si, et seulement si, } x^2 - 5 = 0$$

et 5, ce n'est pas un carré :-(ah mais si :-) $5 = \sqrt{5}^2$ donc je me ramène à résoudre l'équation :

$$x^2 - \sqrt{5}^2 = 0$$

c.a.d.

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Et là, une autre tarte à la crème du collège : on a deux nombres dont le produit est nul, cela signifie que l'un des deux au moins vaut zéro ! (vous n'êtes pas de ceux qui pensent que c'est pareil pour tout autre nombre : si le produit de deux nombres vaut 4, c'est que l'un au moins des deux vaut 4 ?...Meu non ! Vous n'êtes pas de ces gens qui ne réfléchissent pas !)

$$x - \sqrt{5} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{5} = 0$$

Deux problèmes du second degré que l'on sait résoudre et on trouve bien :

$$x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$

Bon, on aurait pu aussi réfléchir à la notion de *racine carrée*. Résoudre $x^2 = 5$ c'est chercher les nombres dont le carré vaut 5 et on sait qu'il en existe deux, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$

herche

Que se passe-t-il si on doit résoudre $(x + 2)^2 = 5$?

Il y a aussi un autre cas qui peut être étudié au collège :

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

herche

Comment faire ?

Et puis il y a des petites surprises...Si on nous les propose en Seconde, c'est qu'on nous aidera pour retrouver un cas connu.

Pour régler les problèmes du style $7x^2 - 123x + 1678 = 0$, on attendra d'être en première...

EXERCICES

TP 3 - 1

Définissez une fonction Python qui prend en entrée les dimensions d'un rectangle et qui calcule son périmètre puis une autre qui calcule son aire.

TP 3 - 2

Documentez-vous sur le code ASCII.

Étudiez les fonctions Python `ord` et `chr` sachant qu'en gros `ord` renvoie le code ASCII d'un caractère donné en entrée et `chr` renvoie le caractère dont on a donné le code ASCII en entrée.

Par exemple :

```
1 In [213]: ord('a')
2 Out[213]: 97
3
4 In [214]: chr(97)
5 Out[214]: 'a'
6
7 In [215]: ord('A')
8 Out[215]: 65
9
10 In [216]: ord('B')
11 Out[216]: 66
12
13 In [217]: ord('b')
14 Out[217]: 98
```

Construisez une fonction Python qui prend en entrée une lettre majuscule et renvoie la même lettre en minuscule. Par exemple, vous devez obtenir :

```
1 In [220]: to_minus('E')
2 Out[222]: 'e'
```

Recherche 3 - 1

On considère un « mécanisme » qui prend deux entiers p et q en entrée et renvoie leur produit : est-ce une fonction ?

On considère un « mécanisme » qui prend un entier en entrée un entier m et qui renvoie un couple d'entiers dont m est le produit : est-ce une fonction ?

Recherche 3 - 2

Un appareil a relevé de manière continue la température dans un abri entre 0 heure à 24 heures. Les points notés sur la courbe indiquent des relevés exacts.

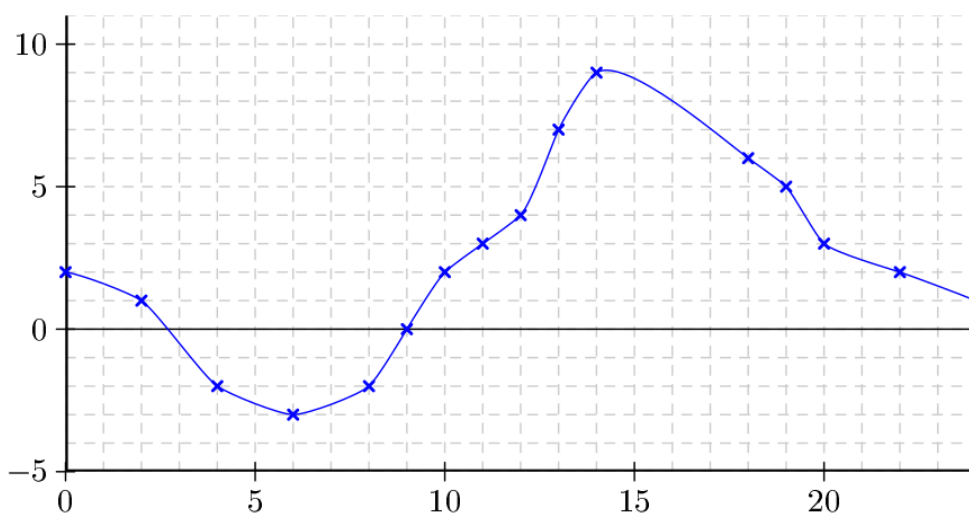


FIGURE 3.1

Sur ce graphique, on peut lire par exemple qu'à 12h00, la température était de 4° . Au nombre 12 est ainsi associé la valeur 4. On note $f(12) = 4$ ou encore $f : 12 \mapsto 4$. La fonction f représente l'association entre l'heure et la température. On dit que 12 a pour image 4 ou que 4 est l'image de 12 par la fonction f .

1. Compléter :

i. La température à 4h00 est de donc $f(4) =$.
L'image de 4 par f est .

ii. $f(9) =$. L'image de 9 par la fonction f est .
Il faisait $^{\circ}$ à heures.

iii. L'image de 20 par la fonction f est donc la température était de à .

iv. $f(\quad) = 7$ donc à heures la température était de $^{\circ}$.

v. $f : 6 \mapsto$ donc l'image de .

2. Expliquer pourquoi il n'existe pas plusieurs points distincts de la courbe qui ont la même abscisse ?

3. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel la température a été relevée :

$D_f =$

4. Plus généralement, on note x l'heure de l'enregistrement et $f(x)$ la température correspondante (avec x appartenant à D_f). Compléter le tableau suivant :

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$f(x)$									

Recherche 3 - 3

Traduire par une ou plusieurs égalités chacune des phrases suivantes :

1. L'image de 5 par la fonction f est égale à 4.
2. 5 est l'image de -3 par la fonction f .
3. 2 a pour image 0 par la fonction f .
4. Les images de 2 et 4 par la fonction f sont nulles.
5. Les nombres qui ont pour image 5 par la fonction f sont -3 et 0.
6. 1 est l'image des nombres -2 et 1 par la fonction f .
7. Au nombre 8, on associe le nombre 17 par la fonction f .
8. f est une fonction qui, au nombre -2 associe le nombre $\sqrt{3}$.
9. f est la fonction qui à tout nombre réel x associe son carré.

10. f associe à tout nombre réel x la somme de son carré et de son triple.

Recherche 3 - 4

Traduire chaque égalité par une phrase, en utilisant le mot image :

1. $f(-2) = 1$

3. $g(4) = 0$

5. $y = f(x)$

2. $f(x) = -2$

4. $b = g(0)$

6. $v = f(t)$

Recherche 3 - 5

Here is the table of values of a function f :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	0	3	5	2	1	4

1. What is the image of -2?
2. What number has image 2?
3. What number has preimage -1?
4. Give two numbers that have the same image.

Recherche 3 - 6

La courbe ci-contre représente une fonction f .

1. Compléter les phrases suivantes :

- L'image de 1 est .
- L'image de est 4.
- L'antécédent de -3 est .
- L'antécédent de est 4.

2. Compléter les égalités :

- $f(-3) =$.
- $f(\quad) = -3$.
- $f(0) =$.
- $f(\quad) = -4$.

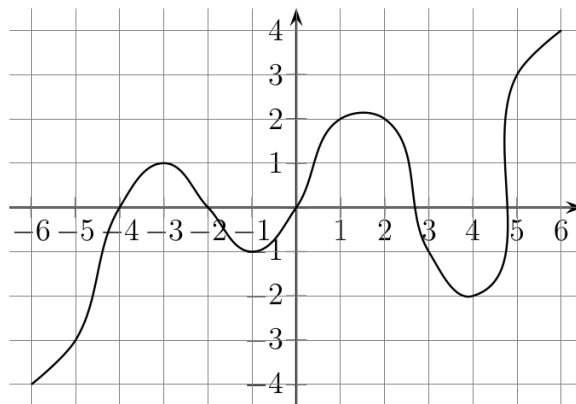


FIGURE 3.2

3. Dresser le tableau de valeurs de f pour x variant entre -6 et 6, de 1 en 1.
4. Compléter les phrases en utilisant soit "Pour tout ... on a ..." soit "il existe un ... tel que ...".
 - i. ... nombre réel x ... $f(x) = 3$.
 - ii. ... nombre réel x ... $f(x) \leq 4$.
 - iii. ... nombre réel x ... $f(x) = -3$.
 - iv. ... nombre réel x de $[-4; -2]$, ... $f(x)$ est positif.
 - v. ... nombre réel x de $[0; 5]$, ... $f(x)$ est négatif.

Recherche 3 - 7

Below is given the graph of a function f defined over $[-4, 3]$ by the formula $f(x) = 0.5(x + 1)^2 - 2$

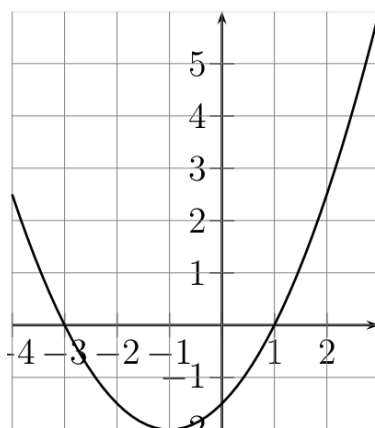


FIGURE 3.3

1. i. Read on the graph the images of 0, -1 and $\sqrt{2}$.
ii. Check these results using the formula.
2. i. Read on the graph the preimages of 0, -3 and -2 .
ii. Check these results using the formula.
3. i. Are the following point on the graph of f ?

$$A(1, 0) ; B(2, 2) ; C(-3, 0).$$

- ii. Explain how you can check the previous answer using the formula, and do it.

Recherche 3 - 8

Cet exercice est un vrai ou faux. Justifier pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou fausse puis rectifier les propositions fausses.

La courbe d'une fonction f a été représentée ci-dessous.

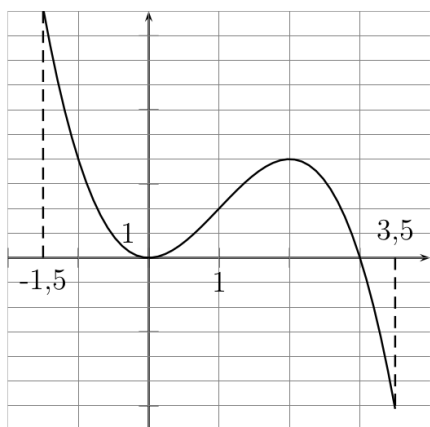


FIGURE 3.4

1. 3,5 a pour image -6 par f .
2. 3 est l'image de 0 par f .
3. La courbe représentative de f a deux points d'ordonnée nulle.
4. $f(-1) = f(2)$.
5. $f(x)$ n'est jamais inférieur à 1,5.
6. $f(2) < f(3)$.
7. si $0 \leq x \leq 3$ alors $0 \leq f(x) \leq 4$.

Recherche 3 - 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)^2 + 4$.

1. Déterminer par le calcul les images de 0, de -1 et de $\sqrt{2}$.
2. Déterminer les antécédents de 0, puis ceux de 4 et enfin ceux de 8.
3. Dresser un tableau de valeurs de pas 1 pour x variant de -4 à 3.
4. Tracer la représentation graphique de f .

Recherche 3 - 10

On considère l'algorithme ci-dessous :

- Déterminer l'image de 0 par cet algorithme.
- Déterminer l'image de -3 par cet algorithme.
Quelle modification faudrait-il apporter à l'algorithme pour éviter le problème ?
- Soit f la fonction qui à la variable x associe le réel y obtenu après application de l'algorithme.
Donner l'expression algébrique de f . Simplifier.

```

begin
  Input:  $x$  real number ;
   $a \leftarrow x + 2$  ;
   $b \leftarrow \frac{1}{a + 1}$  ;
   $y \leftarrow a^2 + \frac{1}{b}$  ;
  Output:  $y$  ;
end

```

Recherche 3 - 11

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer s'il peut s'agir de la représentation graphique d'une fonction.

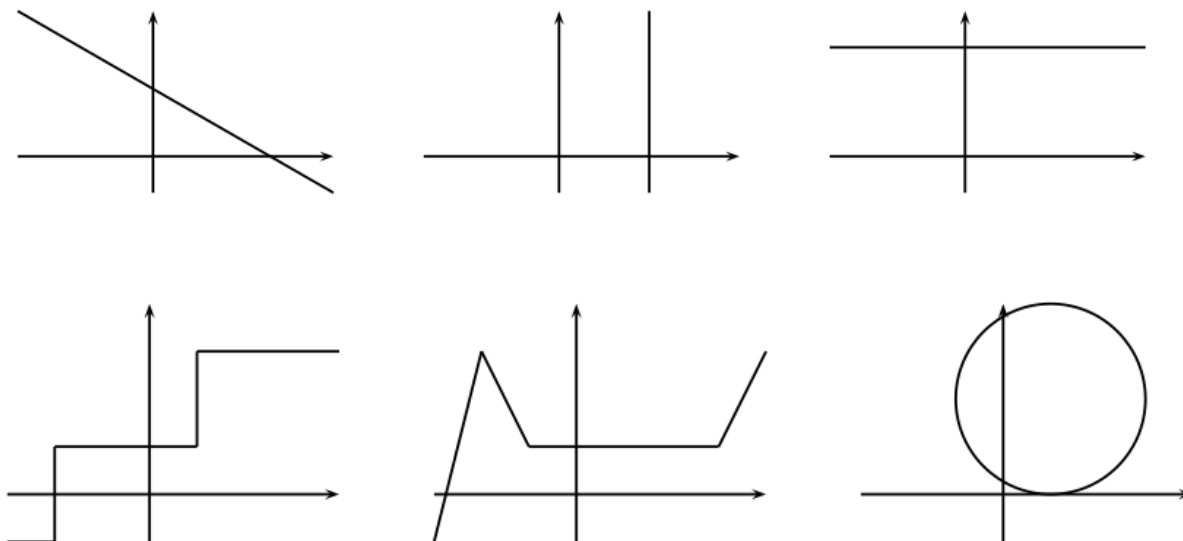


FIGURE 3.5

Recherche 3 - 12

Parmi les tableaux de valeurs ci-dessous, lequel ne peut pas être celui d'une fonction. Justifier.

1.

x	-5	-2	0	1	10	-3	-4
y	2	3	1	2	3	1	2

2.

x	-5	-2	0	-5	-2	0	-5
y	2	3	1	7	5	4	6

Recherche 3 - 13

L'algorithme ci-dessous est une simplification du procédé utilisé pour tracer des courbes en CAO.

```

begin
  Input:  $x, a, b$  real numbers ;
  switch the value of  $x$  do
    case  $x \in [0; 1]$  :  $x \rightarrow a$  ;  $0 \rightarrow b$  ;
    case  $x \in [1; 2]$  :  $x \rightarrow a$  ;  $x - 1 \rightarrow b$  ;
    case  $x \in [2; 3]$  :  $4 - x \rightarrow a$  ;  $x - 1 \rightarrow b$  ;
    case  $x \in [3; 4]$  :  $4 - x \rightarrow a$  ;  $5 - x \rightarrow b$  ;
    case  $x \in [4; 5]$  :  $0 \rightarrow a$  ;  $5 - x \rightarrow b$  ;
  end
  Output:  $a, b$ 
end

```

- En utilisant l'algorithme, compléter le tableau de valeur suivant :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
a											
b											

2. Dans un repère, placer l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ obtenus ci-dessus.
3. La courbe obtenue est-elle celle d'une fonction ? Expliquer

Recherche 3 - 14 Les Syldaves et leurs Schritzznôtschhs à poil vert

Les Syldaves aiment les animaux et ceux-ci le leur rendent bien. Le Schritzznôtschh à poil vert est d'ailleurs comme vous le savez l'animal préféré des Syldaves.

Si vous allez en Syldavie, une question que ne manqueront pas de vous poser les indigènes est : « entre votre Schritzznôtschh à poil vert et vous, qui est le plus jeune ? ».

Pour ne pas vous laisser surprendre, mieux vaut jeter un coup d'œil sur le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0	16	23	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96

TABLE 3.1 – L'âge d'un Schritzznôtschh à poil vert ramené à l'échelle humaine

x est l'âge du Schritzznôtschh à poil vert (en années) et y est l'âge humain correspondant (en années).

1. Représenter dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points de coordonnées $(x; y)$ correspondant aux différentes valeurs du tableau ci-dessus (échelle : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 mm pour une année sur l'axe des ordonnées). Que remarque-t-on ?
2.
 - i. On appelle D la droite à laquelle appartiennent la majorité des points du graphique. Déterminer une équation de D .
 - ii. Adolf a 4 ans et demi ; à quel âge humain cela correspond-il ?
 - iii. Quel sera l'âge de Grossertaleruntersturmenfeldenfühlenratschweintöte lorsque son âge humain correspondant sera 89 ans ?
 - iv. Stalishnaïa a 9 mois ; peut-on estimer avec précision, en utilisant la droite D , l'âge humain correspondant ?
3. On propose de compléter la formule précédente pour $0 \leq x \leq 2$.
 - i. Tracer les trois segments de droites $[OA]$, $[AB]$ et $[BC]$ avec $A(1; 16)$, $B(2; 23)$ et $C(2; 28)$.
Si l'on respecte le graphique, quelle est la formule liant x et y pour :

• $0 \leq x \leq 1$
• $1 \leq x \leq 2$
• $2 \leq x \leq 3$

 Dans ces conditions, quel est l'âge humain correspondant à l'âge du Schritzznôtschh à poil vert Stalishnaïa ?
 - ii. On envisage de chercher une formule conduisant à une courbe au tracé « plus régulier » entre les trois premiers points O , A , B .
On propose : $y = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels.
Calculer a , b et c sachant que la courbe doit passer par les points O , A et B .
Compléter le tableau suivant à l'aide de la formule obtenue :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y																

Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées (x, y) correspondant aux différentes valeurs du tableau ci-dessus (échelle : 5 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 mm pour une année sur l'axe des ordonnées). Tracer la courbe qui en résulte.

Placer les points A , B et C . Cette courbe passe-t-elle par le point C .

4. Un grand savant syldave propose de décrire la correspondance entre l'âge d'un Schritzznôttschh à poil vert et celui d'un être humain par une formule unique pour : $0 \leq x \leq 10$:

$$y = 4(x + 4) - 4^{(2-x)}$$

- i. Calculer y pour chacun des entiers 0, 1, 2. Cette formule vous paraît-elle satisfaisante ?
- ii. En utilisant une calculatrice, calculer y pour
 - x variant de 0 à 1 au pas de 0,1 ;
 - x variant de 1 à 2 au pas de 0,2 ;
 - x variant de 2 à 10 au pas de 0,5.

Représenter sur le même graphique qu'au 3.2. les points de coordonnées $(x; y)$ pour $0 \leq x \leq 10$

Recherche 3 - 15 Évolution de la population des Schritzznôttschhs à poil vert

L'évolution de la population des Schritzznôttschhs à poil vert d'une année à l'année suivante a, dans certains cas, été modélisée par des écologistes syldaves de la façon suivante :

- soit x la population, en milliers d'individus, d'une année donnée ;
- la population x' l'année suivante, toujours en milliers d'individus, est :

$$x' = f(x) = \lambda x(1 - x)$$

On se propose d'étudier une telle évolution dans le cas particulier où : $x' = f(x) = 1,6x(1 - x)$ et $x \in [0, 1]$. Sur le graphique 5.6 page suivante, on a représenté C la courbe représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

Exemples d'évolution de la population d'une année à l'année suivante

1. La population, une année donnée, est égale à 0,7. Soit p la population de l'année suivante.

- i. Vrai ou faux ?
 - i. p est un antécédent de 0,7 par f Vrai – Faux
 - ii. p est la solution de l'équation $f(x) = x$ Vrai – Faux
 - iii. $p = f(0,7)$ Vrai – Faux
 - iv. p est une solution de l'équation $f(x) = 0,7$ Vrai – Faux
 - v. p est l'image de 0,7 par f Vrai – Faux

- ii. Déterminer p à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

2. La population, une année donnée, est égale à q (non nul) et s'éteint l'année suivante.

- i. Vrai ou faux ?
 - i. q est un antécédent de 0 par f Vrai – Faux
 - ii. q est la solution de l'équation $f(x) = x$ Vrai – Faux
 - iii. $q = f(0)$ Vrai – Faux
 - iv. q est une solution de l'équation $f(x) = 0$ Vrai – Faux
 - v. q est l'image de 0 par f Vrai – Faux

- ii. Déterminer q à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

- iii. Pourquoi la population s'est-elle éteinte ?

3. La population, une année donnée, est égale à r (non nul) et reste la même l'année suivante.

- i. Vrai ou faux ?
 - i. r est un antécédent de 0 par f Vrai – Faux
 - ii. r est la solution de l'équation $f(x) = x$ Vrai – Faux
 - iii. $r = f(0)$ Vrai – Faux
 - iv. r est une solution de l'équation $f(x) = 0$ Vrai – Faux
 - v. r est l'image de 0 par f Vrai – Faux

- ii. Déterminer r à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

Etude de l'évolution d'une population sur plusieurs années

En 1990, la population de Schritzzñòtschhs à poil vert compte 0,9 milliers d'individus.

On pose $a = 0,9$, $b = f(a)$, $c = f(b)$, $d = f(c)$, $e = f(d)$, $g = f(e)$, $h = f(g)$ et $i = f(h)$,

1. Que représentent les nombres a , b , c , d , e , g , h et i par rapport à la population de Schritzzñòtschhs à poil vert ?

2. Etude graphique

- i. En s'aidant de la courbe C représentative de f et de la droite D , placer successivement a sur l'axe des abscisses, puis b sur l'axe des ordonnées, puis b sur l'axe des abscisses, puis c sur l'axe des ordonnées, etc ...
- ii. Déterminer graphiquement l'évolution à long terme de la population de Schritzzñòtschhs à poil vert.

3. Etude algébrique

- i. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de chacun de ces 7 nombres à 0,01 près.
- ii. Grâce à ces valeurs numériques, vérifier et éventuellement corriger les constructions graphiques.
- iii. Comment évolue à long terme la population de Schritzzñòtschhs à poil vert ?

4. Comparaison des méthodes

Quels avantages peut-on trouver à chacune des méthodes algébrique et graphique pour l'étude de l'évolution de cette population :

- i. du point de vue de la précision des résultats ?
- ii. du point de vue de la compréhension des phénomènes ?

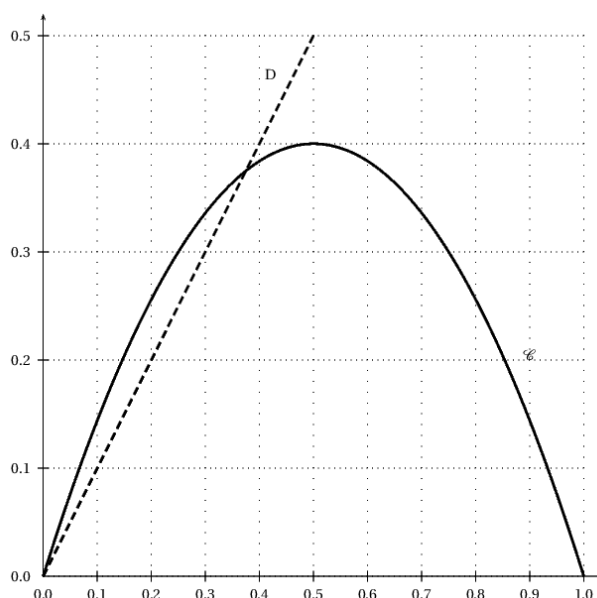


FIGURE 3.6 – Évolution de la population de Schritzzñòtschhs à poil vert

Recherche 3 - 16 Science Syldave

Chimie

Au temps $t = 0$ on met du Atchtztsct et du Brtzzscfghj (notés A et B) dans un bécher. Ils réagissent ensemble de sorte que l'on a constamment $C_A(t) + C_B(t) = 1$, où $C_A(t)$ et $C_B(t)$ sont les concentrations

respectives des produits A et B au temps t . Sur le graphique 5.7 on a représenté la concentration du produit A en fonction du temps (en heures).

1. Représenter sur le même graphique la concentration $C_B(t)$ du produit B .

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

i. $C_A(t) = C_B(t)$

ii. $C_A(t) \geq C_B(t)$

iii. $C_B(t) \geq 0,6$

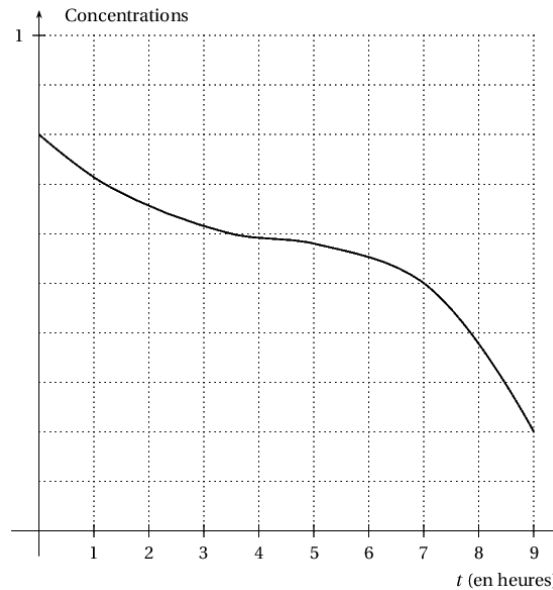


FIGURE 3.7 – Concentration de Atchtzztsct en fonction du temps

Électricité

En électricité, si on mesure l'intensité qui traverse une résistance ainsi que la tension à ses bornes, on trouve la relation suivante :

$$U = RI$$

où :

- U est tension (en Volts)
- R est la résistance (en Ohms)
- I est l'intensité (en Ampères)

On effectue une expérience au cours de laquelle on fixe la tension $U = 400V$ aux bornes d'un dipôle et on augmente petit à petit la valeur de la résistance de ce dipôle. La mesure $R(t)$ de cette résistance au cours du temps est donnée par le graphique 5.8 page suivante.

1. Représenter dans le même graphique l'intensité $I(t)$ en fonction du temps.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

i. $I(t) = 20$

ii. $I(t) \leq 10$

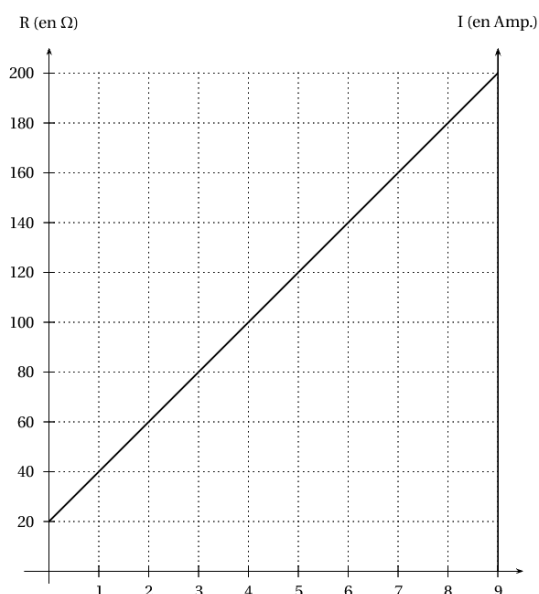


FIGURE 3.8 – Résistance en fonction du temps

Recherche 3 - 17 Résolution graphique

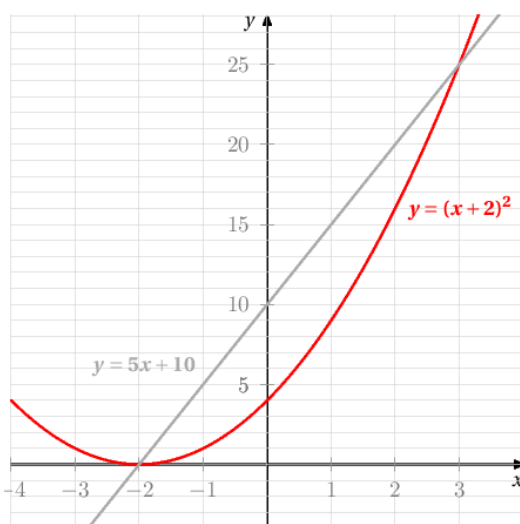
1. On a représenté dans un même repère orthonormal sur l'intervalle $[-4; 3]$

- la fonction f définie sur R par $f(x) = (x + 2)^2$,
- la fonction g définie sur R par $g(x) = 5x + 10$.

2. Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :

- i. l'équation $(x + 2)^2 = 5x + 10$;
- ii. l'inéquation $(x + 2)^2 \leq 5x + 10$.

3. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

**Recherche 3 - 18**

Une balle est lancée d'une hauteur de 2 mètres (c'est à dire du bout du bras d'une joueuse), avec un angle d'environ 11° par rapport au sol. Elle suit alors une trajectoire donnée approximativement par la formule

$$h(x) = -0,04x^2 + 0,2x + 2.$$

1.
 - i. Dresser un tableau de valeurs pour h avec toutes les valeurs de x entières entre 0 et 10. Quelle semble être la valeur maximale de $h(x)$.
 - ii. Représenter graphiquement la fonction h sur l'intervalle $[0; 10]$.
 - iii. Décrire les variations de h par un tableau de variations sur l'intervalle $[0; 10]$.
 - iv. Utiliser les éléments précédents pour répondre aux questions suivantes :
 - i. A quelle distance du point de lancer la balle touche-t-elle le sol ?
 - ii. A quelle distance la balle atteint-elle son altitude maximale ?
 - iii. Pour quelles distances la balle est-elle au-dessus de son altitude initiale ? Pour quelles distances est-elle en-dessous ?

iv. Pour quelles distances la balle est-elle à une altitude comprise entre 1 et 2 mètres ?

2. Après le premier rebond, la balle suit une trajectoire donnée approximativement par la formule

$$h(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 15.$$

- i. A quelle distance du point de lancer la balle touche-t-elle le sol pour la 2ème fois ?
- ii. A quelle distance la balle atteint-elle son altitude maximale entre les deux rebonds ? Comparer cette altitude maximale avec la valeur maximale avant le premier rebond.

Recherche 3 - 19

Let f and g be two functions such that $f(x) = x^2 + 2x$ and $g(x) = -x^2 - 2x + 6$.

1. Draw the graphs of functions f and g in the same coordinate system.
2. Solve graphically the equations and inequations below :
 - i. $f(x) = 0$;
 - ii. $g(x) = 0$;
 - iii. $f(x) = -1$;
 - iv. $f(x) = g(x)$;
 - v. $f(x) < 3$;
 - vi. $f(x) \leq g(x)$.
3. Find graphically two numbers x such that $g(x) - f(x) = 6$.
4. Solve algebraically the equations $f(x) = 0$ and $f(x) = -1$.
5.
 - i. Prove that the equation $f(x) = g(x)$ is equivalent to $x^2 + 2x - 3 = 0$.
 - ii. Check algebraically that the solutions you found graphically for the equation $f(x) = g(x)$ are such that $x^2 + 2x - 3 = 0$.
6.
 - i. Prove that the equation $g(x) - f(x) = 6$ is equivalent to $x^2 + 2x = 0$.
 - ii. Deduce the solutions of the equation $g(x) - f(x) = 6$. Do you find the same values that you found graphically ?

Recherche 3 - 20

On appelle (C_f) la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5 ; 8]$.

On sait que la courbe passe par les points $A(-5 ; 1)$, $B(-1 ; 3)$, $C(3 ; 4)$, $D(6 ; 3)$ et $E(8 ; -1)$.

1. Placer ces points dans un repère du plan.
2. Tracer une courbe pouvant représenter f sachant que :
 - f est strictement croissante sur $[-5 ; 3]$;
 - f est strictement décroissante sur $[3 ; 8]$.
3. Quel est l'image de 3 ?
4. 3 a-t-il des antécédents ? Si oui, préciser lesquels.
5. Peut-on tracer une autre courbe respectant les conditions données ?

Recherche 3 - 21 Horner's machines

Any operation involving additions, multiplications and squares can be described by a *machine* made the three components shown below :



Addition



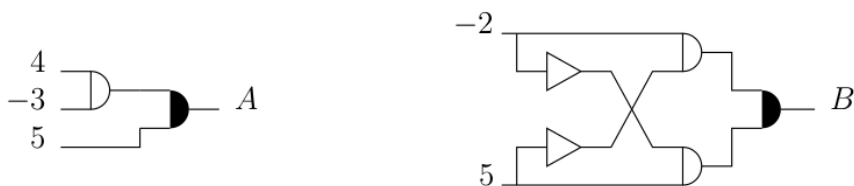
Multiplication



Square

Study of some machines

1. Consider the two machines below.



i. Compute the outputs A and B .

ii. What is the output of the second machine (the one of the right-hand side) when the input is $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$?

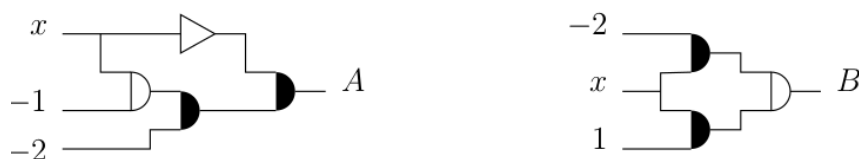
iii. Express the output of the second machine as a formula with input a and b .

2. In the two situations below, compare the outputs A and B .

— Situation 1 :



— Situation 2 :

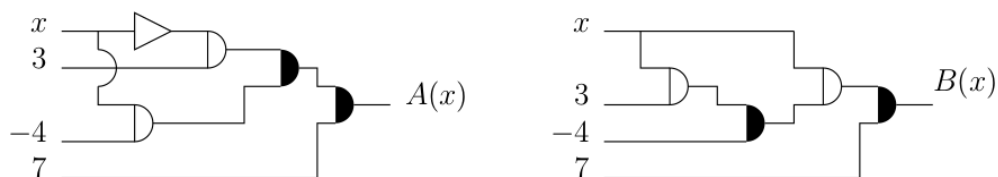


3. Draw a machine which outputs $(a + 2b)^2$ when a and b are entered.

4. How can the addition component be used to carry out a subtraction?

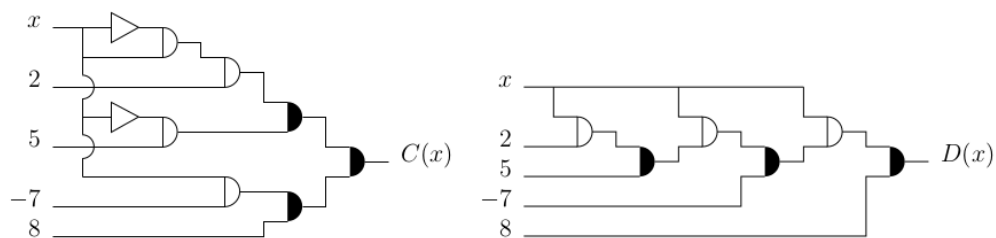
The most economical machine

1. i. Check that the outputs $A(x)$ and $B(x)$ of the two machines below are the same.



ii. Count the number of components and connexions in each of the two machines above. Which one is the most economical?

2. i. Check that the outputs $C(x)$ and $D(x)$ of the two machines below are the same.



ii. Count the number of components and connexions in each of the two machines above. Which one is the most economical?

3. Draw the most economical machine for the expression $7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 4$.

chaptertext Dans ce chapitre, nous aborderons le problème des positions relatives de plans et de droites.

Premiers pas dans l'Espace



1

Généralités

La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme des notions premières, c'est-à-dire suffisamment familières pour ne pas les définir. Pour leur étude il sera nécessaire d'admettre un certain nombre de propriétés de base.

Un point désigne un endroit précis. On le représente par un point (.) ou une croix ($\times$), et on lui donne un nom. Mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, « point », qui n'a pas d'étendue.

Une droite est un ensemble de points, qu'on représente par un « segment », et auquel on donne un nom. Il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, « droite », qui n'a pas de largeur, et qui est illimité dans les deux sens.

Un plan est un ensemble de points. La feuille de papier est une bonne représentation d'un plan. Lorsque l'on veut représenter plusieurs plans de l'espace, on représente chacun d'entre eux par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en « perspective ». Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique « plan » qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans tous les sens.



Théorème 4 - 1

Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.

2

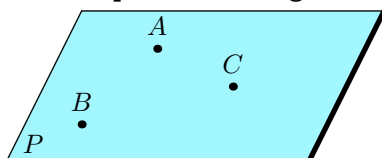
Axiomes d'incidence

Les axiomes d'incidences de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

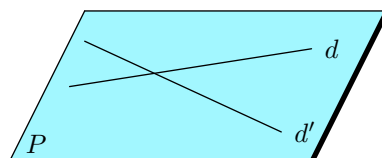
1. Par deux points distincts de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB) .
2. Par trois points non alignés, A , B et C passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC) .
3. Si A et B sont deux points d'un plan P , tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

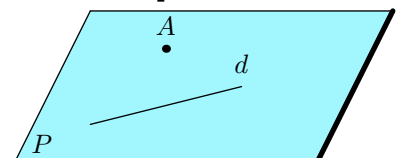
trois points non alignés



deux droites sécantes



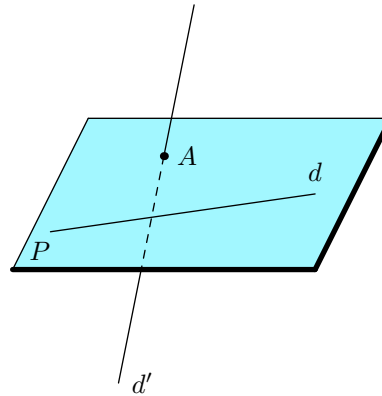
une droite et un point extérieur à celle-ci



3

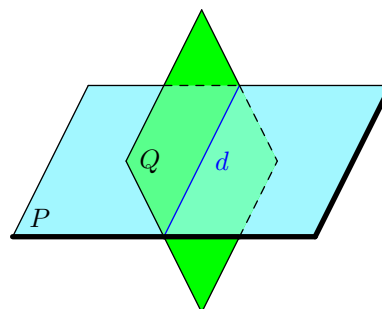
Positions relatives de droites et plans

1. d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :
- i. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,



- ii. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).
2. d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :
- i. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants (voir la figure précédente),
 - ii. la droite est incluse dans le plan,
 - iii. la droite et le plan n'ont aucun point commun.
3. P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

- i. les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)



- ii. les plans sont confondus,
- iii. ils n'ont aucun point commun.

4

Parallélisme dans l'espace

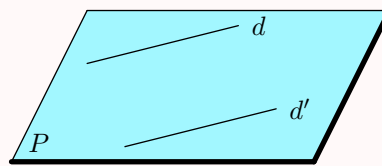
La liste des propriétés n'est pas exhaustive. ...certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section.

4 1 Définitions**Définition 4 - 1**

- Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes. Il en est ainsi de deux droites confondues ou bien coplanaires et sans point commun.
- Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. Il en est ainsi de deux plans confondus ou sans point commun.
- Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne pas sécants. Il en est ainsi d'une droite incluse dans un plan ou d'une droite et d'un plan sans point commun.

Remarques

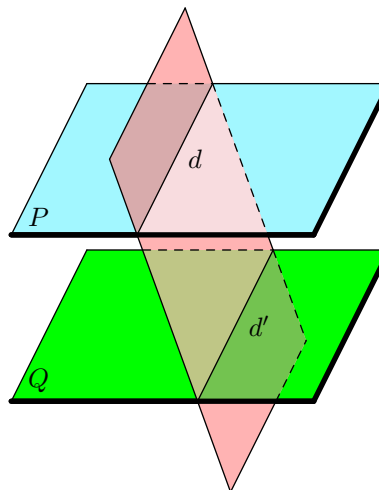
- Le fait que deux droites n'aient aucun point commun ne suffit pas pour conclure, dans l'espace, qu'elles sont parallèles.
- Deux droites strictement parallèles définissent un plan.

**4 2 Parallélisme entre droites****Théorème 4 - 2**

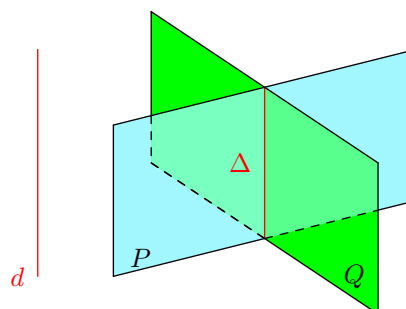
Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Théorème 4 - 3

Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.

**Théorème 4 - 4**

Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

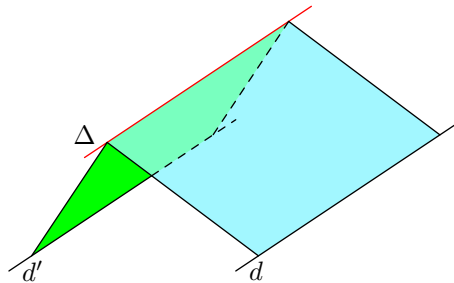


Théorème 4 - 5

« Théorème du toit »

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d' .

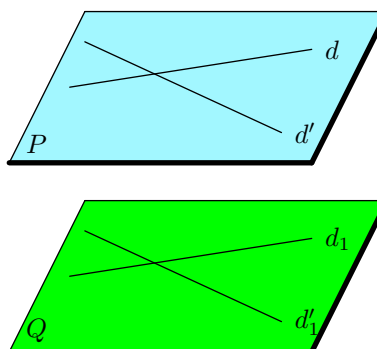
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d' .

**4 3 Parallélisme entre plans****Théorème 4 - 6**

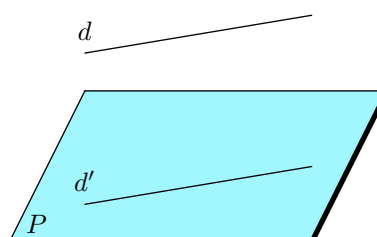
Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 4 - 7

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q , alors les plans P et Q sont parallèles.

**4 4 Parallélisme entre droite et plan****Théorème 4 - 8**

Si une droite d est parallèle à une droite d' , alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d' .



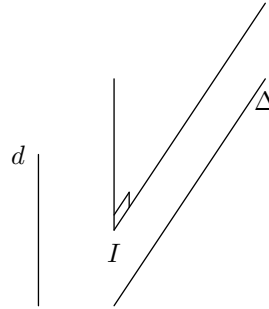
5

Orthogonalité dans l'espace - HORS PROGRAMME ! (Pour les curieux...)

5 1 Définitions

Définition 4 - 2

Deux droites d et Δ (non nécessairement coplanaires) sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites menées par un point I quelconque sont perpendiculaires. (Nous admettrons alors que les parallèles à d et Δ passant par n'importe quel autre point sont également perpendiculaires)



Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube alors $(AD) \perp (HG)$.

Remarques

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires, elles ne le sont que si elles sont coplanaires. En revanche la réciproque est vraie par définition de droites orthogonales.
- Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles. (facile à voir dans un cube)

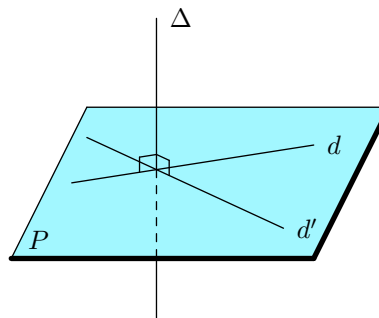
Définition 4 - 3

Une droite d est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

5 2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

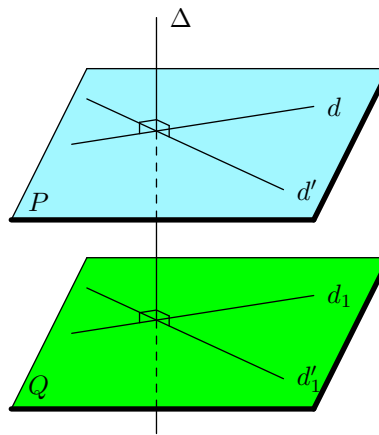
Théorème 4 - 9

Pour qu'une droite Δ soit orthogonale à un plan P il suffit que Δ soit orthogonale à deux droites sécantes de P .

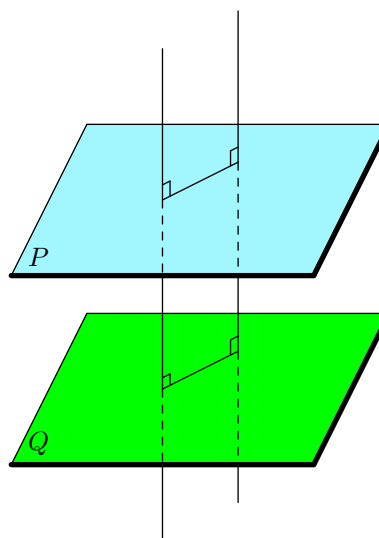


Théorème 4 - 10

- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

**Théorème 4 - 11**

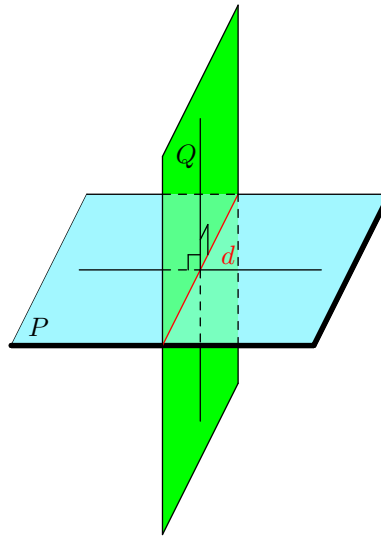
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

**5 3 Orthogonalité de deux droites de l'espace****Théorème 4 - 12**

Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

5 4 Plans perpendiculaires**Définition 4 - 4**

Un plan Q est perpendiculaire à un plan P ($Q \perp P$), si il existe une droite de Q orthogonale à P . (Dans ce cas on a aussi $P \perp Q$).

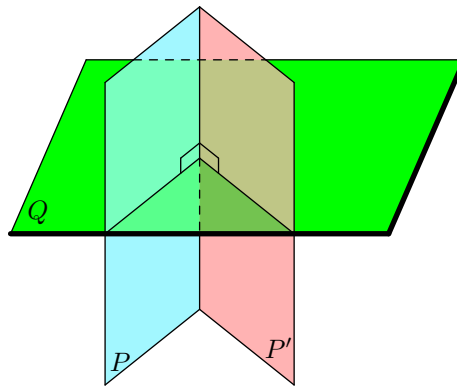


Remarques

- l'exemple qu'il faut avoir en tête est celui d'un cube : deux faces quelconques non parallèles sont perpendiculaires.
- Si $P \perp Q$ alors toute droite de l'un n'est pas orthogonale à l'autre, c'est vrai pour l'une d'entre elles. (Dans un cube $ABCDEFGH$ les faces $ABFE$ et $ABCD$ sont perpendiculaires mais la droite (AF) n'est pas orthogonale à la face $ABCD$ car elle n'est pas orthogonale à (AB))
- Si $P \perp Q$ et $P' \perp Q$ alors P et P' ne sont pas nécessairement parallèles (facile à voir dans un cube avec les faces). Cette relation de perpendicularité de plans est donc moins souple que celle de perpendicularité de droites.

Théorème 4 - 13

Si P et P' , deux plans sécants, sont perpendiculaires à un même plan Q , alors leur intersection est orthogonale à Q .



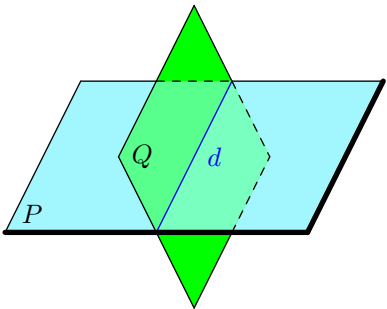
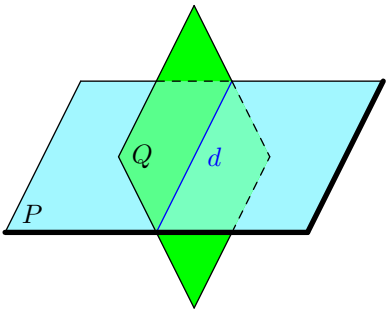
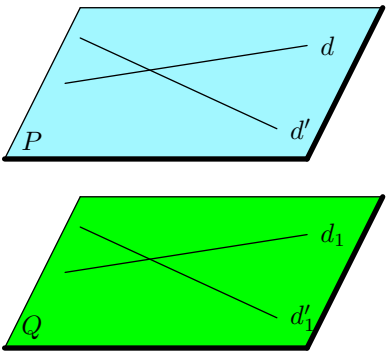
Théorème 4 - 14

Si $P \perp Q$, toute droite de l'un, qui est orthogonale à leur intersection, est orthogonale à l'autre. (voir la figure de la définition précédente)

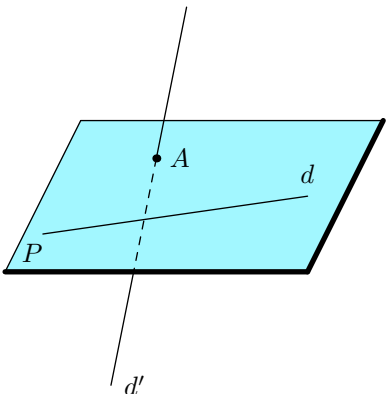
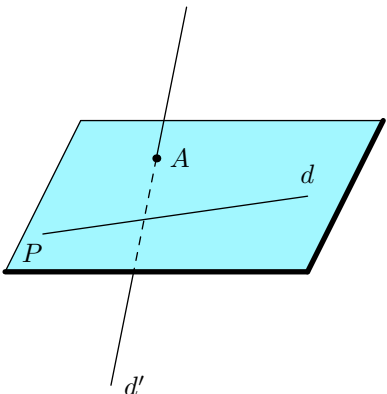
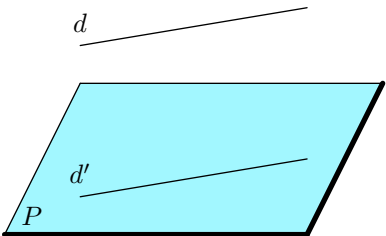
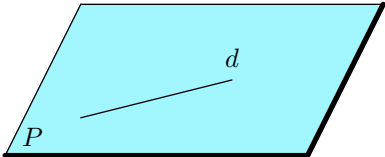
Merci à David NIVAUD

6 En résumé

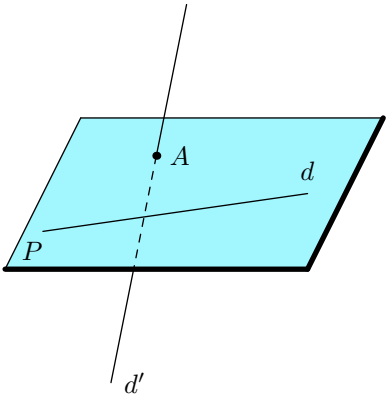
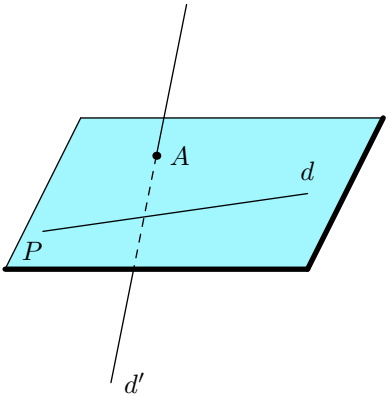
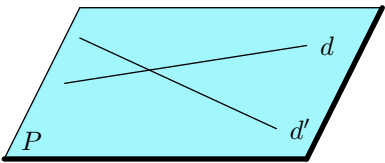
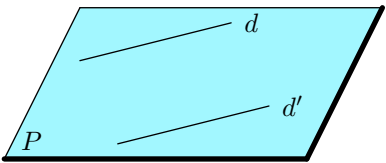
6 1 Positions relatives de 2 plans

(P) et (Q) sont sécants	(P) et (Q) sont parallèles	
	(P) et (Q) sont strictement parallèles	(P) et (Q) sont confondus
		
$(P) \cap (Q) =$	$(P) \cap (Q) =$	$(P) \cap (Q) =$

6 2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

(d') est sécante à (P)	(d) est parallèle à (P)	
	(d) strictement parallèle à (P)	(d) contenue dans (P)
		
$(P) \cap (d') =$	$(P) \cap (d) =$	$(P) \cap (d) =$

6 3 Positions relatives de deux droites

(d) (d') non coplanaires	(d) et (d') coplanaires	
	(d) et (d') sécantes en I	(d) et (d') parallèles
		
$(d) \cap (d') =$	$(d) \cap (d') =$	$(d) \cap (d') =$

7 EXERCICES

Recherche 4 - 1

Soit un cube $ABCDEFGH$.

1. Préciser le nombre de faces, de sommets et d'arêtes de ce solide.
2. Citer les faces du cube qui sont situées dans un plan frontal.
3. Parmi les droites suivantes, préciser celles qui sont des fuyantes : (AB) , (BC) , (FH) , (EC) et (DA) .

Recherche 4 - 2

1. Représenter en perspective cavalière un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm avec un angle de fuite $\alpha = 45^\circ$ et un coefficient de réduction $k = 0,7$.
2.
 - i. Construire le point I , milieu de $[BG]$.
 - ii. Placer le point J sur le segment $[EH]$ tel que $EJ = 2$ cm.
 - iii. Placer le point K sur le segment $[HG]$ tel que $HK = 4$ cm.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $BCGF$? du triangle ADH ? du triangle JDH ? du triangle BEG ?

Recherche 4 - 3

Représentez en perspective cavalière un cube $ABCDEFGH$.

Le point I est le centre du carré $ABCD$.

Pour chacune des questions suivantes, vous ferez un dessin, et vous mettrez en évidence les objets donnés.

1. Préciser la position relative des plans suivants (préciser leur intersection) :
 - i. les plans (BCH) et (EBC) ;
 - ii. les plans (BCH) et (AEI) ;
 - iii. les plans (ADI) et (FGH) .
2. Préciser la position relative des droites et plans suivants (préciser leur intersection) :
 - i. la droite (EC) et le plan (FGD) ;
 - ii. la droite (AB) et le plan (EFC) ;
 - iii. la droite (EI) et le plan (ABC) ;
3. Préciser la position relative des droites suivantes (préciser leur intersection) :

i. les droites (AC) et (IC) ;	iv. les droites (AB) et (DC) ;
ii. les droites (AB) et (AC) ;	v. les droites (AC) et (BD) ;
iii. les droites (AB) et (CG) ;	vi. les droites (AB) et (EG) ;

Recherche 4 - 4

Représentez en perspective cavalière un cube $ABCDEFGH$.

Le point I est le centre du carré $ABCD$.

Pour chacune des questions suivantes, vous ferez un dessin, et vous mettrez en évidence les objets donnés.

1. Préciser la position relative des plans suivants (préciser leur intersection) :
 - i. les plans (EHD) et (ADE) ;
 - ii. les plans (HCG) et (EFC) ;
 - iii. les plans (HGE) et (EFC) .
2. Préciser la position relative des droites et plans suivants (préciser leur intersection) :

- i. la droite (FD) et le plan (AEH) ; iii. la droite (EG) et le plan (ABC) ;
- ii. la droite (HF) et le plan (EFG) ;
- 3. Préciser la position relative des droites suivantes (préciser leur intersection) :
 - i. les droites (HF) et (GE) ; iii. les droites (HD) et (EF) ;
 - ii. les droites (AE) et (BF) ;

Recherche 4 - 5

$ABCD$ est un tétraèdre. E est un point de $[AB]$ et F un point de $[AD]$. Préciser la position relative des objets suivants (préciser leur intersection) :

- 1. les droites (BD) et (EF) .
- 2. la droite (EF) et le plan (BCD) .

Recherche 4 - 6

$ABCD$ est un tétraèdre. E est un point de $[AB]$ et F un point de $[AC]$. Préciser la position relative des objets suivants (préciser leur intersection) :

- 1. les droites (BD) et (EF) .
- 2. la droite (EF) et le plan (BCD) .

Recherche 4 - 7

$ABCDE$ est une pyramide. Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ADE) ?

Recherche 4 - 8

$ABCD$ est un tétraèdre. E est un point de $[AB]$ et F un point de $[AD]$. Quelle est l'intersection des plans (EFC) et (BCD) ?

Recherche 4 - 9

$ABCD$ est un tétraèdre. $I \in [AB]$, $J \in [AC]$ et $K \in [AD]$. Construire l'intersection des plans (BCD) et (IJK) .

Recherche 4 - 10

$IJKL$ est un tétraèdre. $E \in [IJ]$, $F \in [KJ]$ et $G \in [JL]$.
Construire l'intersection des plans (EFG) et (ILK) .

Recherche 4 - 11

$ABCD$ est un tétraèdre. $L \in [AC]$, $M \in [BD]$ et $K \in [AD]$.
Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (KLM) .

Recherche 4 - 12

$IJKL$ est un tétraèdre. $L \in [AD]$, $M \in [CD]$ et K est un point de la face (ABC) .
Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (KLM) .

Vecteurs



La notion de vecteur est assez récente par rapport aux mathématiques que vous avez rencontrées jusqu'ici. En effet, les précurseurs du calcul vectoriel se faisaient encore insulter pendant la seconde moitié du XIX^e siècle.

Les vecteurs modélisent de très nombreuses situations : des forces en mécanique, des messages en informatique, des impédances en électronique,...

Un vecteur, au lycée en 2016, c'est un **déplacement**.

Les notions essentielles qui seront abordées :

- notion de vecteur
- somme de vecteurs
- produit d'un vecteur par un réel
- colinéarité de vecteurs et applications en géométrie
- retour sur les repères du plan. Notion de base.

1

Le programme officiel

- **Notions à découvrir** : définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé.
À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu.
- **Notions à découvrir** : égalité de deux vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.
- **Notions à découvrir** : coordonnées d'un vecteur dans un repère. Connaître les coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- **Notions à découvrir** : somme de deux vecteurs.
Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère. La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
- **Notions à découvrir** : produit d'un vecteur par un nombre réel.
Utiliser la notation $\lambda \vec{u}$. Établir la colinéarité de deux vecteurs. Pour le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a, \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda \vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.
- **Notions à découvrir** : relation de Chasles.
Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

2

Légende des exercices

-  **Objectif : préparer les Devoirs communs**
 - lier vecteur et translation ;
 - lier vecteur et direction/sens/norme ;
 - lier vecteurs égaux et parallélogramme ;
 - savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base ;
 - lier somme de vecteurs et coordonnées ;
 - utiliser la relation de Chasles ;
 - produit d'un vecteur par un réel et coordonnées ;
 - caractériser alignement de point et parallélisme de droites à l'aide de la colinéarité.
-  **Objectif : préparer la Première / le Bac**
 - lier milieu et vecteurs ;
 - maîtriser des calculs vectoriels non triviaux en utilisant à bon escient la relation de Chasles ;
 - distinguer base et repère ;
 - résoudre un problème géométrique en prenant l'initiative d'introduire une base ou un repère.

—  Objectif : préparer le Post Bac

- résoudre des problèmes liés aux vecteurs en mettant en œuvre des outils algébriques ou géométriques complexes ;
- faire preuve d'initiative ;
- avoir de l'imagination ;
- réfléchir seul(e) ;
- chercher, se tromper, recommencer, laisser reposer et reprendre plus tard ;
- ne pas avoir peur de l'inconnu ;
- aborder un problème inconnu en essayant de se ramener à un problème connu.

3

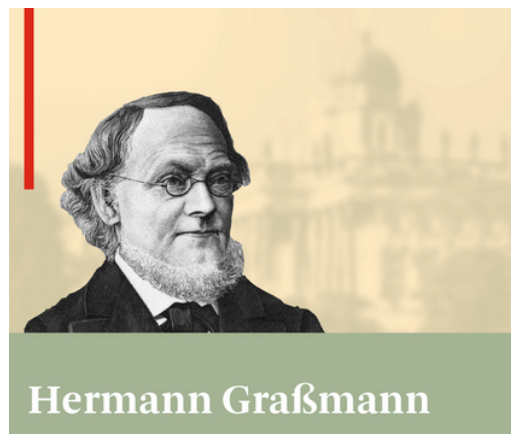
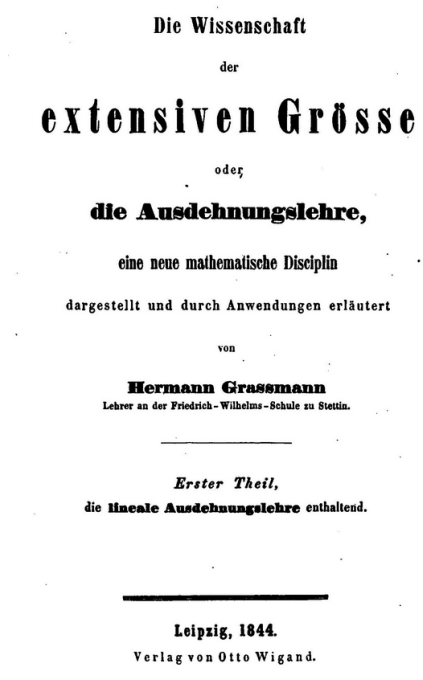
Introduction qui ne sert à rien : contexte historique

VECTEUR : Du latin *vector*, dérivé de *veho* (« transporter »)

Organisme qui ne provoque pas lui-même une maladie mais qui disperse l'infection en transportant les agents pathogènes d'un hôte à l'autre.

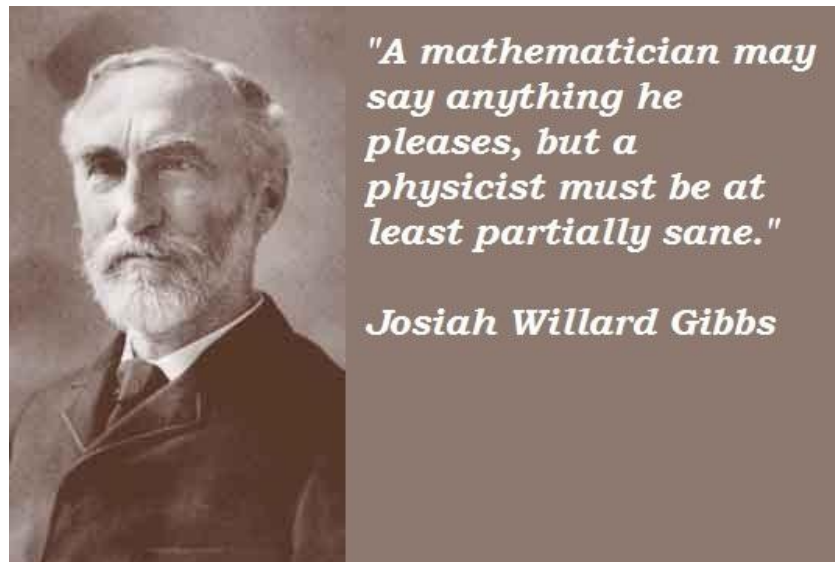
Mais ça, c'est plutôt ce qu'est un vecteur pour M. LAHOUE.

La première personne à avoir introduit en 1844 la notion de vecteur fut Herman Graßman, né en Prusse en 1809 :



Mais personne ne l'a pris au sérieux, d'autant plus que ce n'était qu'un pauvre petit professeur de lycée. Pourtant ses idées allaient bouleverser la science...mais bien plus tard.

De l'autre côté de l'Atlantique, un physicien comprend l'importance de cette invention, c'est Josiah Willard GIBBS, né à New Haven en 1839 :



Il jette des ponts entre vecteurs et analyse mais cela ne plaît pas à tout le monde :

Professor Gibbs must be ranked as one of the retarders of progress in virtue of his pamphlet on Vector Analysis, a sort of hermaphrodite monster

Peter Guthrie Tait in « an elementary treatise on Quaternions » (1867)

Un autre physicien, Oliver HEAVYSIDE, né à Camden en 1850, autodidacte et hors norme, montrera comment traduire et exploiter des notions fondamentales telles que les équations de MAXWELL à l'aide du calcul vectoriel.



Aujourd'hui, en mécanique, un vecteur c'est une force.

En électronique, ça peut être une impédance.

En informatique, ça peut être un message.

Un vecteur, au lycée en 2016, c'est un **déplacement**.

Mais il faut comprendre que ce n'est qu'un exemple de vecteur.

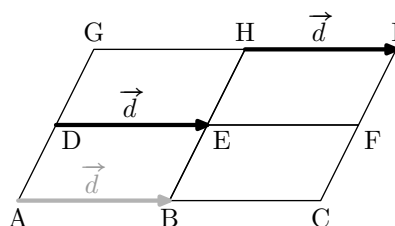
Même au lycée, nous rencontrerons d'autres vecteurs : les intégrales, les nombres complexes,..

Un vecteur est simplement un élément d'un espace vectoriel...mais ceci est une autre histoire...

4

Qu'est-ce qu'un vecteur du plan ?

Nous ne pouvons pas, à notre niveau, donner une définition rigoureuse d'un vecteur du plan. Disons que concrètement, un vecteur est un *déplacement* :



Le *déplacement* de A vers B est le même que celui de D vers E ou de H vers I. On appelle ce *déplacement* un VECTEUR défini par

- une **direction** : celle de la droite (AB) ;
- un **sens** : celui de A vers B ;
- une **norme** : qui est égale à la longueur AB.

Ce déplacement est appelé la *translation* de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Danger

Il ne faut pas confondre *sens* et *direction* : par exemple $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction (car les droites (AB) et (IH) sont parallèles) mais n'ont pas le même sens.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont donc les *représentants* d'un même vecteur car ils ont même sens, même direction et même norme : on peut donc désigner ce vecteur par un nom unique, par exemple $\vec{d}$.

Notations

Les conventions typographiques sont en fait très diverses :

- gras minuscule : **a**
- fraktur : **𝔞**
- souligné : a
- avec une flèche : $\vec{a}$

Remarque

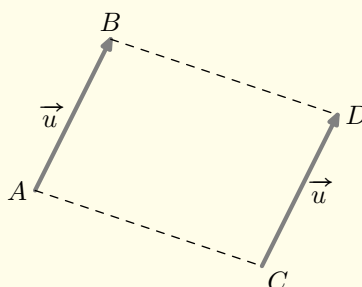
Les deux derniers cas sont surtout employés pour l'écriture manuscrite.

La *norme* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la longueur AB. Pour désigner la norme de $\vec{d}$, on utilise $\|\vec{d}\|$. On a

$$\|\vec{d}\| = AB = DE = HI$$

Pensez parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme



À retenir

Recherche

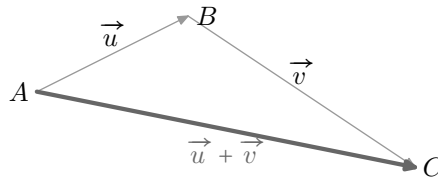
Dans mon jeune temps, on disait que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étaient égaux^a si et seulement si les segments $[A; D]$ et $[B; C]$ avaient le même milieu : pourquoi ?

a. En fait, on disait que les *bipoints* (A,B) et (C,D) étaient *équipollents*...

5

Somme de vecteurs

Le secret : je me déplace de A vers B puis de B vers C : globalement, je suis parti de A et je suis arrivé en C



C'est en fait la fameuse *Relation de CHASLES*

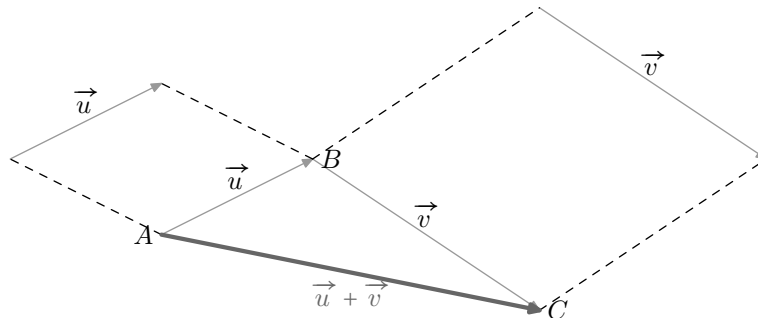
Définition 5 - 1

Somme de deux vecteurs : relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Mais qu'en est-il de cette somme lorsqu'on considère deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

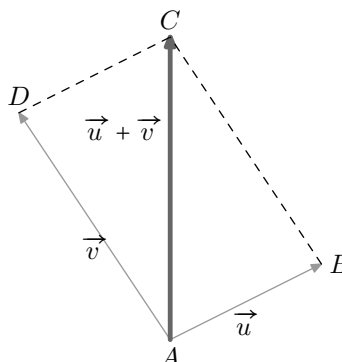
Il suffit de prendre des *représentants* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bien choisis :



Remarque

On retrouve alors une propriété de la somme des nombres : la commutativité i.e. la somme ne dépend pas de l'ordre des termes.

On peut aussi « penser parallélogramme » :



6 Vecteur nul - Opposé d'un vecteur

Je pars de A, je vais en B et je retourne en A : la relation de CHASLES le confirme

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

Recherche

- Que peut-on dire de ce vecteur $\overrightarrow{AA}$?
- Quelle est sa norme ?
- Quelle est sa direction ?
- Quel est son sens ?

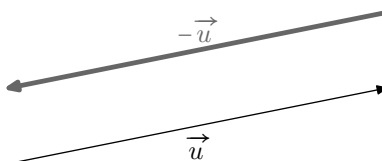
Définition 5 - 2

Vecteur nul / Opposé d'un vecteur

On appelle ce vecteur de norme nulle le *vecteur nul* et on le note $\vec{0}$.

Plus généralement si on considère un vecteur $\vec{u}$, on peut toujours trouver un vecteur de même direction, de même norme et de sens opposé : quand on l'ajoute à $\vec{u}$, on obtient le vecteur nul.

On l'appelle le *vecteur opposé* de $\vec{u}$ et on le note bien sûr $-\vec{u}$



Remarque

On retrouve encore des propriétés identiques pour la somme des nombres.

7 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Nous avons déjà abordé le problème en parlant de l'opposé du vecteur $\vec{u}$ qu'on note $-\vec{u}$, c'est à dire $(-1) \times \vec{u}$.

Nous pouvons aisément imaginer que le vecteur $3\vec{u}$ est en fait égal à $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, et les additions de vecteurs, on connaît !

Nous pouvons même comprendre que $-3\vec{u}$, c'est $(-\vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u})$

Vous comprendrez donc sans problème la définition suivante :

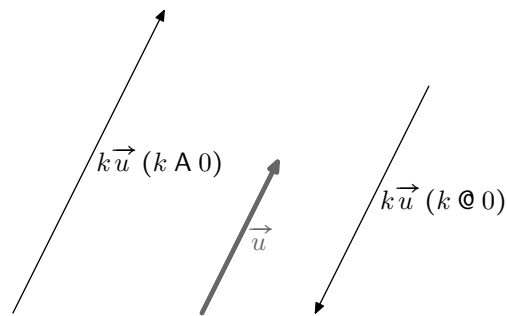
Définition 5 - 3

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul. Alors on note $k\vec{u}$ le vecteur

- ayant la même direction que $\vec{u}$;
- ayant le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire sinon ;
- ayant pour norme $k\|\vec{u}\|$ si $k > 0$ et $-k\|\vec{u}\|$ sinon.

Ce petit dessin résume les différents cas de figure :



8

Vecteurs colinéaires

8.1 Définition

Nous avons remarqué que $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ avaient la même direction.

Inversement, si deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, alors on peut imaginer qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Par exemple, s'ils ont le même sens, alors le vecteur $\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ a

- le même sens que $\vec{v}$ (car ...)
- la même direction que $\vec{v}$ (car ...)
- la même norme que $\vec{v}$ (car ...)

donc $\vec{v} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$, ce qui confirme notre supposition.

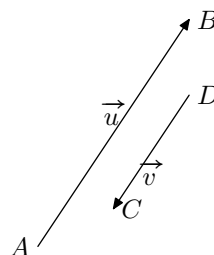
Avant de résumer ce résultat, un peu de vocabulaire :

Définition 5 - 4

On dit que deux vecteurs sont *colinéaires* si, et seulement si, ils ont la même direction.

Remarque

Deux COPains partagent leur pain, deux CORrecteurs du Bac partagent le même recteur, deux vecteurs COLinéaires partagent la même ligne...



Notre observation précédente va donc nous permettre d'énoncer le théorème primordial suivant :

Théorème 5 - 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Danger

Vous ferez bien attention à parler de vecteurs colinéaires et non pas de vecteurs parallèles ! Deux droites peuvent être parallèles si elles ont tous leurs points ou aucun point en commun. On ne peut pas dire la même chose des vecteurs car les vecteurs ... n'ont pas de points ! Ce sont des déplacements, pas des ensembles de points comme les droites.

8 2 Conséquences

- Si on arrive à montrer que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires*, on pourra en déduire que les droites (AB) et (CD) sont *parallèles*.
- Si on arrive à montrer que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *colinéaires*, on pourra en déduire que les droites (AB) et (AC) sont *parallèles*. Or, comme vous l'avez remarqué, les droites (AB) et (AC) ont le point A en commun. Que pensez-vous de 2 droites parallèles ayant un point en commun ? Elles sont bien sûr ...^a
Et donc les points A, B et C appartiennent à une même droite : ils sont *alignés*.

À retenir

Montrer que deux vecteurs sont colinéaires peut nous aider à montrer que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés.

Le problème va être d'arriver à prouver que deux vecteurs sont colinéaires : il suffira de « penser BASE » ...

9**Base du plan vectoriel**

Euh.. le plan vectoriel, c'est quoi ?

Disons que c'est l'ensemble des déplacements en dimension 2. On dira alors que :

Définition 5 - 5

Base du plan vectoriel

Deux vecteurs forment une base du plan vectoriel si, et seulement si, ils NE sont PAS colinéaires.

Et on admettra le résultat primordial suivant :

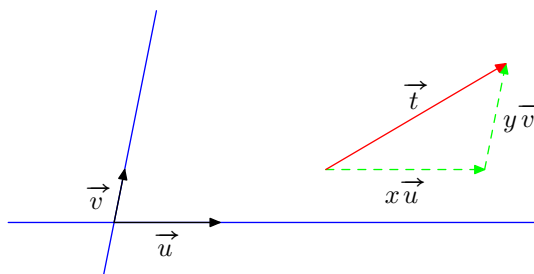
Théorème 5 - 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs NON colinéaires : ils forment une base du plan vectoriel. Alors on peut exprimer n'importe quel vecteur $\vec{t}$ sous la forme

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

avec x et y des réels. Les nombres x et y sont appelés les COORDONNÉES de $\vec{t}$ dans la BASE $(\vec{u}, \vec{v})$

Le secret tient dans le dessin suivant :



Nous n'irons pas plus loin pour l'instant, mais nous retiendrons qu'il sera utile d'exprimer chaque vecteur d'un problème donné en fonction de deux vecteurs de base intelligemment choisis...

^a. D'après un des axiomes d'Euclide qui est la base de la géométrie que vous étudiez au lycée : « par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule »

10

Des exercices... basiques.

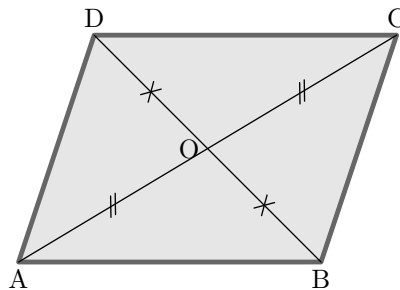
Nous allons étudier toutes sortes d'exercices qui nous fourniront autant d'outils pour résoudre nos énigmes mathématiques...



Recherche 5 - 1

« Voir » des égalités vectorielles

Considérez avec la plus grande attention un parallélogramme $ABCD$ de centre O : donnez un maximum d'égalités vectorielles. En particulier, trouvez des égalités vectorielles qui permettront de caractériser^b le milieu d'un segment.



Nous allons ainsi pouvoir résoudre l'exercice suivant :



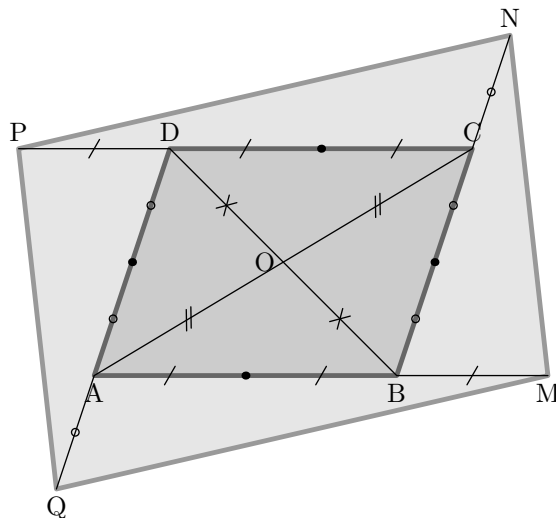
Recherche 5 - 2

Parallélogrammes et milieux

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Les points M , N , P et Q sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$$

- Démontrez que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DP}$.
- Déduisez-en que O est le milieu de $[MP]$.
- Démontrez de même que O est milieu de $[QN]$.
- Déduisez des questions précédentes la nature du quadrilatère $MNPQ$.



Recherche 5 - 3

Construction de point

^b. C'est-à-dire qui permettent de conclure que le point étudié est à coup sûr le milieu du segment étudié.

A et B sont deux points distincts du plan.

On définit le point M par la relation vectorielle : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Exprimez $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placez M .

Idée

M « apparaît » deux fois dans l'égalité : pour pouvoir le construire, il faudrait « partir » d'un point connu et « suivre la flèche » jusqu'en M grâce à des « indications » utilisant des mouvements entre points connus...



Recherche 5 - 4

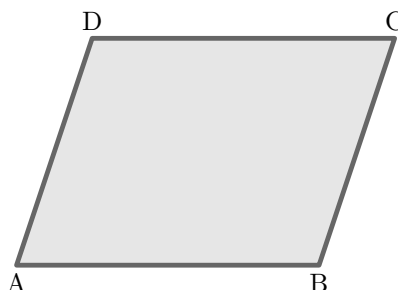
Une base pour démontrer un alignement...

$ABCD$ est un parallélogramme.

I est le milieu de $[AB]$.

E est le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

— Compléter la figure suivante.



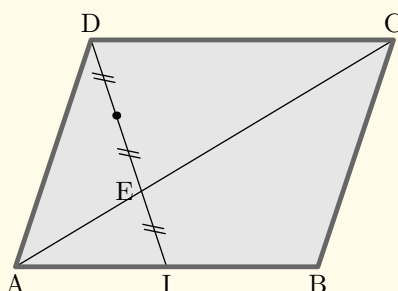
— Il *semble* que A , E et C soient alignés. Nous voudrions le prouver. Pour cela, nous allons essayer de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Oui, mais comment ?

— Pensons base ! Il est assez naturel dans un parallélogramme de choisir $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme vecteurs de base : ils sont bien connus et « représentent » les directions privilégiées du parallélogramme. Le problème, c'est que E est « au milieu »... Réglons ce premier problème : à l'aide de la relation de CHASLES et des données du texte, exprimez $\overrightarrow{AE}$ en n'utilisant que des points « sur les bords » du parallélogramme.

— Déduisez-en une expression de $\overrightarrow{AE}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, nos vecteurs de base.

— Exprimez également $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

— Vous pouvez maintenant comparer $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de vecteurs dignes de confiance et conclure...



Idée



Recherche 5 - 5

...et pour montrer que des droites sont parallèles

ABC est un triangle et I est le milieu du segment $[AC]$.
 O est un point quelconque.

— On se propose de construire le point P tel que :

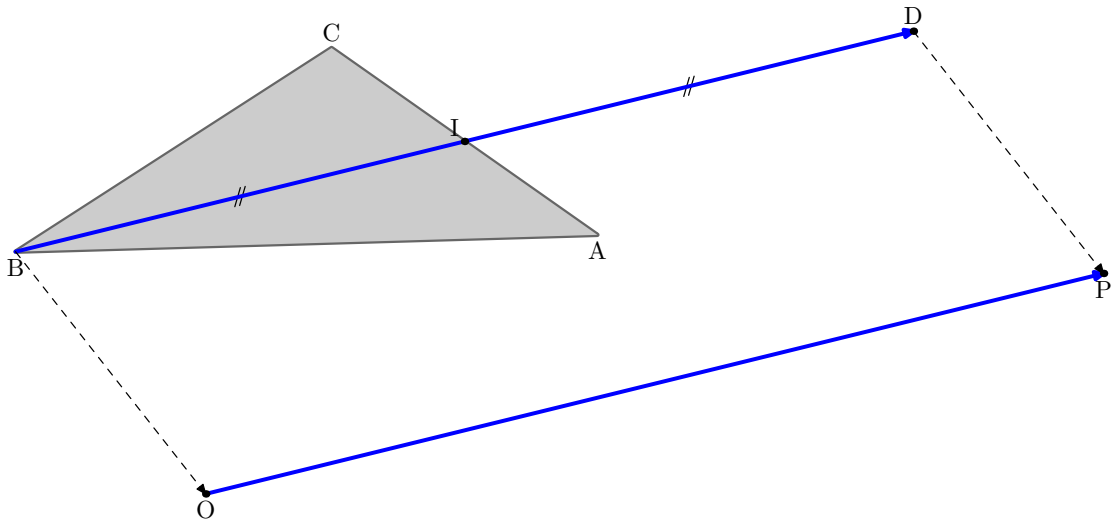
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB}.$$

— Justifier que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$.

— Quelle relation lie alors $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{IB}$?

— Construire P .

— En déduire que (BI) et (OP) sont parallèles.



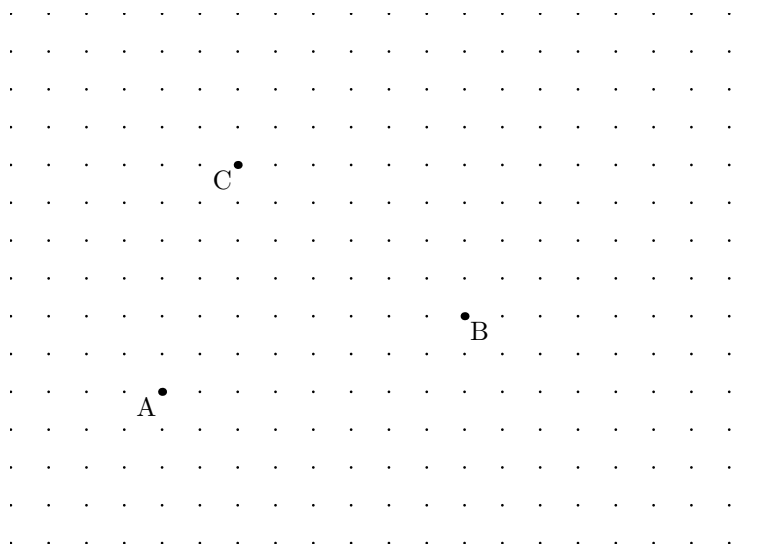
Recherche 5 - 6

Dessin

— Placer le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.

— Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AC}$.

— Placer le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.



Recherche 5 - 7

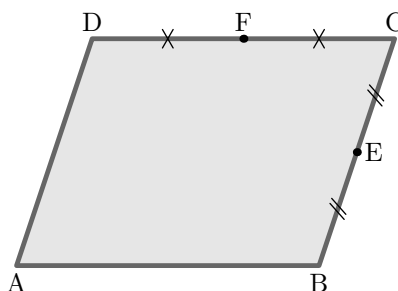
Calcul vectoriel dans un parallélogramme.

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soit E le milieu de $[BC]$ et F le milieu de $[DC]$.

— Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

— Montrer que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$.



Recherche 5 - 8

Calcul « en aveugle »

Dans chacun des cas suivants, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires :

- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$.
- $2\overrightarrow{CB} - 9\overrightarrow{CA} - 7\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- $7\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CA}$.



Recherche 5 - 9

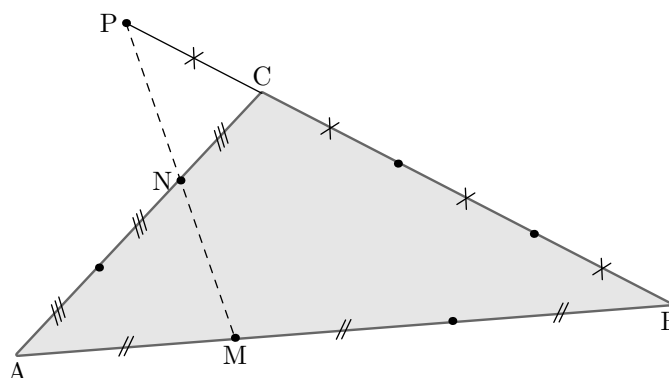
Avec ou sans vecteurs

Soit ABC un triangle.

- Construire les points M , N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

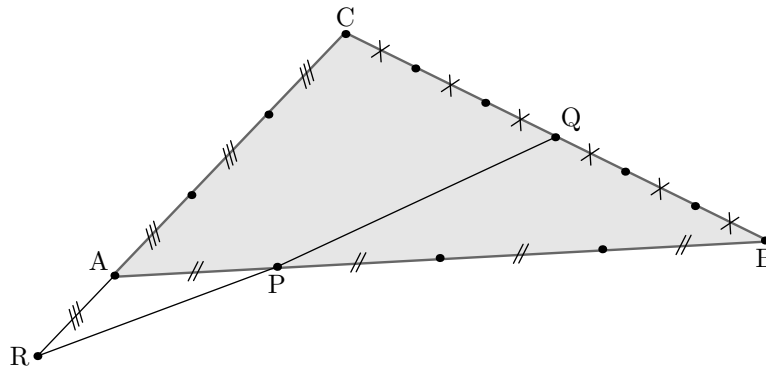
- Montrer que $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On détaillera soigneusement les calculs.
- Montrer que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$. On détaillera soigneusement les calculs.
Que peut-on en conclure ?
- Retrouver ce résultat, sans les vecteurs, en utilisant les propriétés de géométrie plane.



Recherche 5 - 10

Être ou ne pas être alignés...

Les points P, Q et R sont-ils alignés ?



Recherche 5 - 11

Médianes

Préliminaire : P, Q et R sont trois points non alignés et I est le milieu de [Q,R]. Exprimez $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{PI}$.

ABC est un triangle quelconque. A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], CA] et [AB].

- Calculer la somme : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.
- M est un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

11

Vecteurs et repères du plan

11 1 Coordonnées d'un point dans un repère

Nous avons vu précédemment qu'une base (formée de deux vecteurs non colinéaires) permettait d'exprimer n'importe quel vecteur en fonction des 2 vecteurs de base.

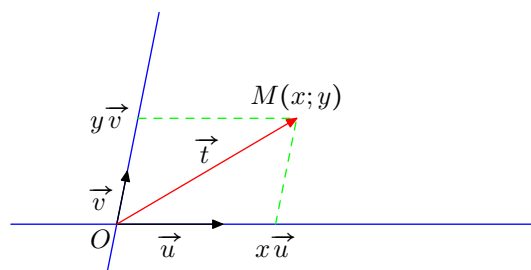
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs NON colinéaires : ils forment une base du plan vectoriel. Alors on peut exprimer n'importe quel vecteur $\vec{t}$ sous la forme

Théorème 5 - 3

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

avec x et y des réels. Les nombres x et y sont appelés les COORDONNÉES de $\vec{t}$ dans la BASE $(\vec{u}, \vec{v})$

Maintenant, pour repérer un point, on choisira une origine fixe et deux vecteurs de base. La clé du chapitre tient dans le dessin suivant :



coordonnées d'un point dans un repère

Dire que le point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que

Théorème 5 - 4

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On appelle x l'abscisse de M et y son ordonnée

11 2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Nous travaillons dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et deux points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) .

Comment traduire *vectériellement* ces renseignements ?

A a pour coordonnées (x_A, y_A) , donc par définition ... $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ De même, on obtient pour B ... $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$

Nous voudrions à présent obtenir les coordonnées $(x_{\overrightarrow{AB}}, y_{\overrightarrow{AB}})$ qui vérifient, d'après notre définition

$$\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AB}}\vec{i} + y_{\overrightarrow{AB}}\vec{j}$$

Le problème, c'est de faire le lien entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Mais oui ! Bien sûr ! Utilisons notre bonne vieille ...relation de CHASLES !

En effet, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) + x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

$$= -x_A\vec{i} - y_A\vec{j} + x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

Or $\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AB}}\vec{i} + y_{\overrightarrow{AB}}\vec{j}$

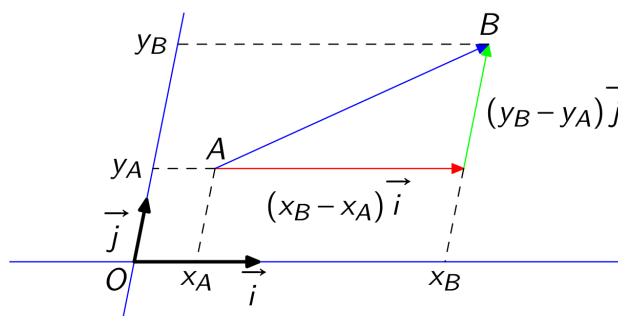
Donc...

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

A et B sont deux points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Théorème 5 - 5



11 3 Coordonnées du milieu d'un segment

Soit I le milieu d'un segment $[A; B]$. Supposons que nous connaissions les coordonnées de A et B. Comment en déduire les coordonnées de I ?

Qui dit coordonnées de I dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dit coordonnées de $\overrightarrow{OI}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Il faudrait donc essayer de relier $\overrightarrow{OI}$ avec $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$...

Que connaissez-vous comme relation vectorielle entre I, A et B ?

Par exemple $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Il nous manque O...comment faire ?

La relation de CHASLES of course...

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IO} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

et donc

Théorème 5 - 6

Le milieu I de $[A; B]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

11 4 Colinéarité et conséquences

Rappelez-vous : si deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, cela veut dire qu'il existe un réel k tel que...

$$\dots \vec{u'} = k \vec{u}$$

Point de vue coordonnées, ça donne...

$$\dots x' = kx \text{ et } y' = ky$$

Que pensez-vous de $x'y - y'x$?

Et oui, c'est...nul

Théorème 5 - 7

Théorème de Némó

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$x'y - yx' = 0$$

Pourquoi l'ai-je appelé Némó ?



Recherche 5 - 12

Montrer que 3 points sont alignés

Est-ce que les points $A(2; 3)$, $B(5; 7)$ et $C(-6; -8)$ sont alignés ?

Idée

Le théorème de Némó devrait vous aider à trouver...

Regardez $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$...



Recherche 5 - 13

Est-ce que des droites sont parallèles ?

$A(-4; -1)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$ et $D(7; 1)$.

Est-ce que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

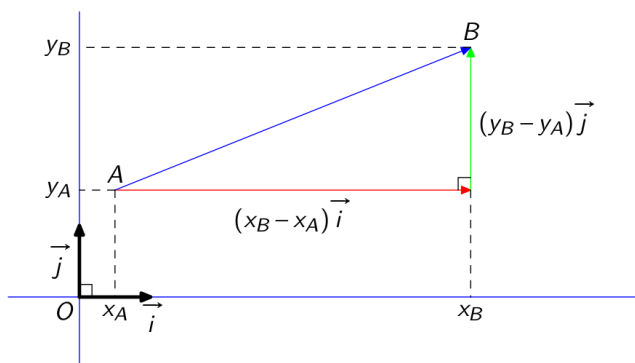
11 5 Repère orthonormal**Définition 5 - 6**

Repère orthonormal

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit *orthogonal* lorsque les droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont perpendiculaires.

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit *orthonormal* lorsqu'il est orthogonal et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont tous deux de norme 1.

Observez cette magnifique figure

**Recherche**

Pouvez-vous calculer la distance AB en fonction des coordonnées de A et de B ?
Bon sang mais c'est bien sûr ! Grâce à notre bon vieux théorème de Pythagore !
Effectuez la démonstration et précisez pourquoi ce calcul n'est valable que dans un R.O.N.

**Recherche 5 - 14****Montrer qu'un quadrilatère est un rectangle**

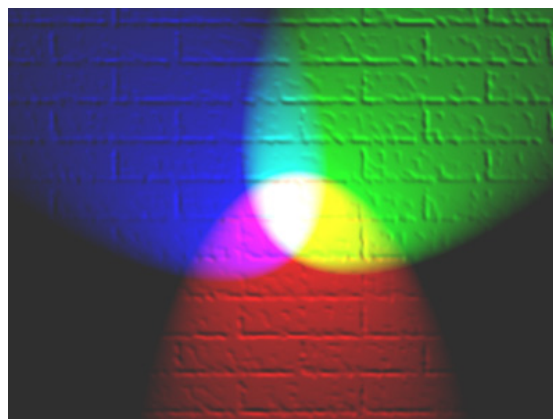
Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les quatre points

$$A(-1; 3) \quad B(3; \sqrt{5}) \quad C(2; -3) \quad D(-2; -\sqrt{5})$$

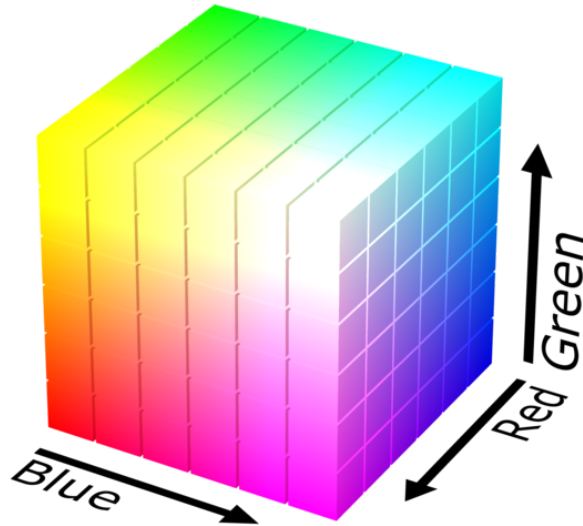
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

12**Une section qui ne sert à rien : les couleurs et les vecteurs**

Un vecteur c'est aussi ça :



Enfin putôt ça :



```
-- Red = [1, 0, 0]
-- Green = [0, 1, 0]
-- Blue = [0, 0, 1]
-- Purple = [0.5, 0, 0.5] = 0.5*Red + 0.5*Blue
-- Olive = [0.5, 0.5, 0] = 0.5*Red + 0.5*Green
-- Yellow = [1, 1, 0] = Red + Green
-- Pink = [1, 0.75, 0.80] = Red + 0.75*Green + 0.80*Blue
-- White = [1, 1, 1] = Red + Green + Blue
```

Recherche

Quel lien faites-vous entre les couleurs informatiques et les vecteurs ?

- Red, Green et Blue sont les couleurs de BASE.
- Pink a pour coordonnées [1, 0.75, 0.80] dans la base (Red, Green, Blue)
- $\overrightarrow{\text{Pink}} = \overrightarrow{\text{Red}} + 0.75 \cdot \overrightarrow{\text{Green}} + 0.8 \cdot \overrightarrow{\text{Blue}}$

```
1 >>> from numpy import array
2 >>> red = array([1,0,0])
3 >>> green = array([0,1,0])
4 >>> blue = array([0,0,1])
5 >>> pink = red + 0.75*green + 0.8*blue
6 >>> pink
7 array([ 1. ,  0.75,  0.8 ])
```


Recherche

les couleurs HTML

En HTML, pour désigner la couleur d'un objet, on donne son code *hexadécimal* :

- Red = #FF0000
- Green = #00FF00
- Blue = #0000FF
- Olive = #808000
- Purple = #800080
- Pink = #FFC0CB

Sauriez-vous l'expliquer ?

13

Exercices d'application directe du cours

13 1 Vecteur et représentants

RAPPEL : Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par une direction, un sens et une longueur aussi appelée norme.

Une direction est donnée par une droite. Toutes les droites parallèles ont la même direction.

Un sens sur une droite est déterminé par deux points A et B de la droite : on a alors le sens de A vers B et le sens de B vers A .

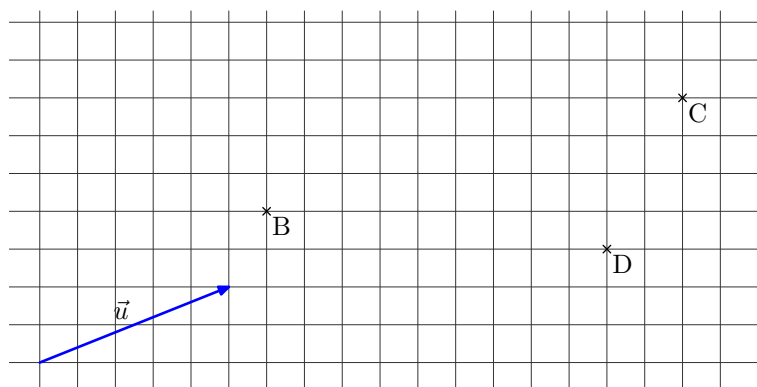
Attention : un vecteur n'a pas une position dans le plan (il n'est pas à « un endroit » précis). Lorsqu'on souhaite « dessiner » un vecteur, on en trace un *représentant* sous la forme d'un segment fléché. Un vecteur a une infinité de représentants. Pour chacun d'eux, le départ de la flèche est appelé *origine* du représentant et l'arrivée est appelée *l'extrémité* du représentant.



Recherche 5 - 15

Sur la figure ci-après on a tracé un représentant d'un vecteur $\vec{u}$.

1. Tracer le représentant de $\vec{u}$ d'origine B ; on note B' son extrémité.
2. Tracer le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité C . Même question pour D . On note respectivement C' et D' leurs origines.
3. Compléter : $\vec{u} =$
4. Tracer le représentant de $\overrightarrow{CD}$ d'extrémité B .
5. Tracer le représentant de $\overrightarrow{DB}$ d'origine C .



13 2 Égalité de vecteurs**Recherche 5 - 16**

Soit A et B deux points du plan.

1. Placer le point C tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire de B pour $[AC]$? Justifier.
2. Placer le point M milieu de $[AB]$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$? Justifier.
3. Énoncer une propriété dans laquelle figure l'expression *si et seulement si* et résumant les deux questions précédentes.

**Recherche 5 - 17**

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points :

$$A(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad B(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \quad C(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

1. Déterminez les coordonnées du point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

2. Déterminez les coordonnées du milieu I de $[AC]$.
3. Déterminez les coordonnées du point N tel que le quadrilatère $AMCN$ soit un parallélogramme.
4. Déterminez l'ordonnée du point P d'abscisse 0 qui appartient à la droite (MN) .

**Recherche 5 - 18**

Soit A et B deux points du plan. Dans chacun des cas suivants, indiquer si on peut affirmer que C est le milieu du segment $[AB]$. Dans le cas contraire, que permet d'affirmer l'égalité proposée ?

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}; \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$$

13 3 Somme de vecteurs

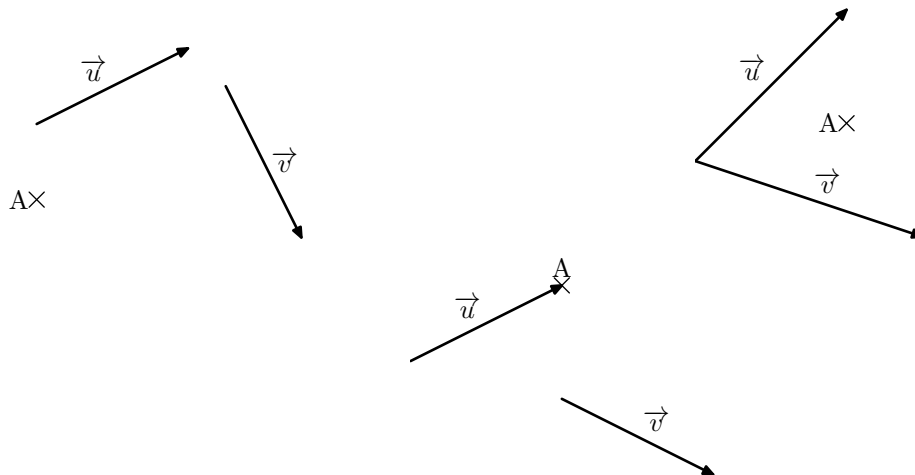
La somme de deux vecteurs est un vecteur dont un représentant est obtenu comme suit :

- on trace un représentant du premier vecteur d'origine A et d'extrémité P ;
- on trace un représentant du deuxième vecteur d'origine P^c et d'extrémité B ;
- la somme des deux vecteurs est alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Recherche 5 - 19**

Construire un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine A dans chacun des cas suivants :

c. Le même P qu'à l'étape précédente !



Recherche 5 - 20

$ABCD$ est un parallélogramme et E est un point du plan.

1. En utilisant la relation de CHASLES, compléter pour obtenir un vecteur défini par un de ses représentants :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \dots\dots\dots; \quad \overrightarrow{AD} + \dots\dots\dots = \overrightarrow{AE}; \quad \overrightarrow{CE} + \dots\dots\dots = -\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\dots} = \overrightarrow{\dots D}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \dots\dots\dots; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BE} = \dots\dots\dots; \quad \dots\dots\dots + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$$

2. Écrire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$$

13 4 Multiplication par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et λ un réel non nul. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et le sens contraire de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$;
- une norme égale à $\lambda \times \|\vec{u}\|$ si $-\lambda \geq 0$ et $\lambda \times \|\vec{u}\|$ sinon.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et λ et μ sont deux réels, alors :

$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}; \quad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}; \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$



Recherche 5 - 21

Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$2\vec{u} + 3(\vec{u} + \vec{v}) - 5\vec{v}; \quad 3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5(2\vec{v} - 3\vec{u}); \quad 2(3\vec{u} - 4\vec{v}) + 8(\vec{v} - \vec{u}) + 2\vec{u}$$



Recherche 5 - 22

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

1. Exprimer uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{BC}; \quad \vec{u}_2 = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}; \quad \vec{u}_3 = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}; \quad \vec{u}_4 = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}.$$

2. Exprimer uniquement en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\vec{v}_1 = 2\overrightarrow{CD}; \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}; \quad \vec{v}_3 = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{OC}; \quad \vec{v}_4 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4.$$

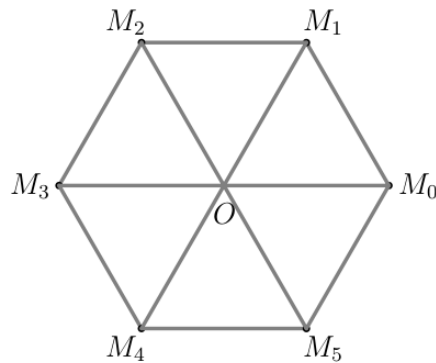
14

Encore des exercices



Recherche 5 - 23

Voici un magnifique hexagone régulier de centre O :



En utilisant uniquement les points de la figure ci-dessus, exprimez les vecteurs suivants à l'aide d'un seul vecteur :

1. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_5M_4}$
2. $\overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_2M_3}$
3. $\overrightarrow{M_0M_1} - \overrightarrow{M_1M_2}$
4. $25\overrightarrow{M_1M_0} + 12\overrightarrow{M_2M_5} + \overrightarrow{M_3M_4}$
5. $\overrightarrow{M_4O} + \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_4M_5}$
6. $\overrightarrow{M_3M_1} - \overrightarrow{M_4M_5}$



Recherche 5 - 24

A et B sont deux points du plan. M est défini par $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Exprimez $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placez A et B au hasard sur une figure puis ajoutez le point M, mais pas au hasard.



Recherche 5 - 25

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points :

$$A(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad B(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \quad C(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

1. Déterminez les coordonnées du point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

2. Déterminez les coordonnées du milieu I de [AC].
3. Déterminez les coordonnées du point N tel que le quadrilatère AMCN soit un parallélogramme.
4. Déterminez l'ordonnée du point P d'abscisse 0 qui appartient à la droite (MN).

Recherche 5 - 26

$ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[DC]$.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.
2.
 - i. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
 - ii. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
 - iii. En déduire que (MN) et (BI) sont parallèles.
3.
 - i. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
 - ii. Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
 - iii. En déduire que les points C , M et N sont alignés.

Recherche 5 - 27

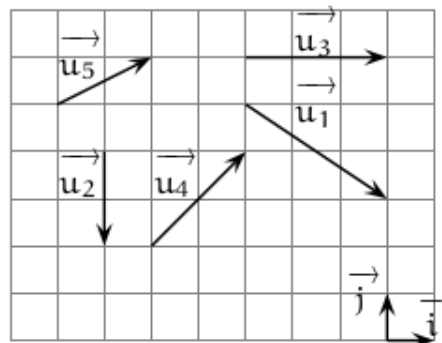
Donnez les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

1. $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
3. $\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right)$
4. $\overrightarrow{u_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AB}$

Recherche 5 - 28

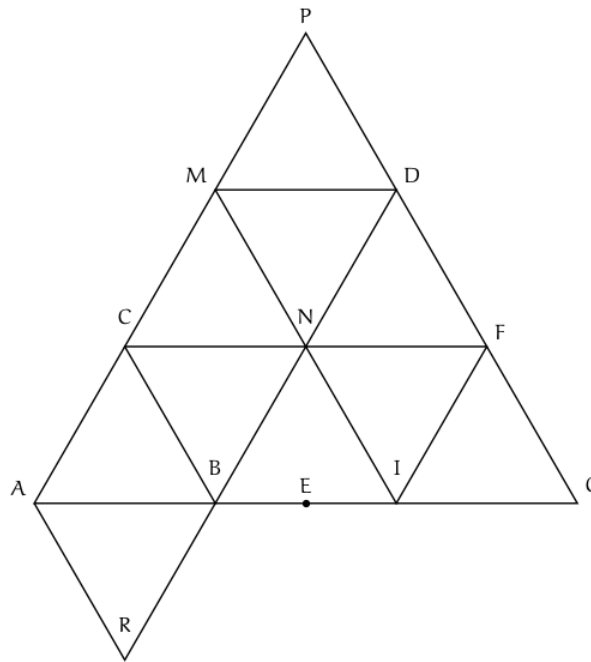
On considère la figure ci-dessous.

1. En utilisant le quadrillage, lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_5}$:
 - i. dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
 - ii. dans la base $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.
2.
 - i. Tracer le vecteur de coordonnées $(2, 1)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
 - ii. Tracer le vecteur de coordonnées $(2, 1)$ dans la base $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.
 - iii. Tracer le vecteur de coordonnées $(2, 1)$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_4})$.



Recherche 5 - 29

On considère la figure ci-dessous. Aucune justification n'est demandée. E est le milieu de $[IB]$.



1. Donner les coordonnées de chacun des points de cette figure dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Donner les coordonnées de chacun des points de cette figure dans le repère $(N; \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NF})$.
3. Donner les coordonnées de chacun des points de cette figure dans le repère $(Q; \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QB})$.



Recherche 5 - 30

Soit ABC un triangle quelconque non aplati. M et N sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

1.
 - i. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
 - ii. Donner les coordonnées de A, B, C, M et N dans ce repère. Justifier.
2. Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
3.
 - i. Déterminer les coordonnées du point P tel que $MNPB$ soit un parallélogramme.
 - ii. Démontrer que P appartient à la droite (BC) .



TP 5 - 1

Test de parallélisme

Mettez au point un algorithme qui prend quatre points A, B, C, D définis par leurs coordonnées dans un certain repère et qui renvoie vrai si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et faux sinon.

Mettez en pratique en écrivant une fonction :

```
1 def test_para(A,B,C,D) :
2     ?????
```

qu'on utilisera ainsi :

```
1 In [15]: test_para((2,3), (4,-5), (2,5), (-3,2))
2 Out[15]: False
```

Les objets entre parenthèses en Python sont des *tuples*.
On peut les utiliser ainsi :

```
1 In [23]: A = (2,4)
2
3 In [24]: A[0]
4 Out[24]: 2
5
6 In [25]: A[1]
7 Out[25]: 4
8
9 In [26]: x,y = A
10
11 In [27]: x
12 Out[27]: 2
13
14 In [28]: y
15 Out[28]: 4
```



TP 5 - 2

Test d'alignement

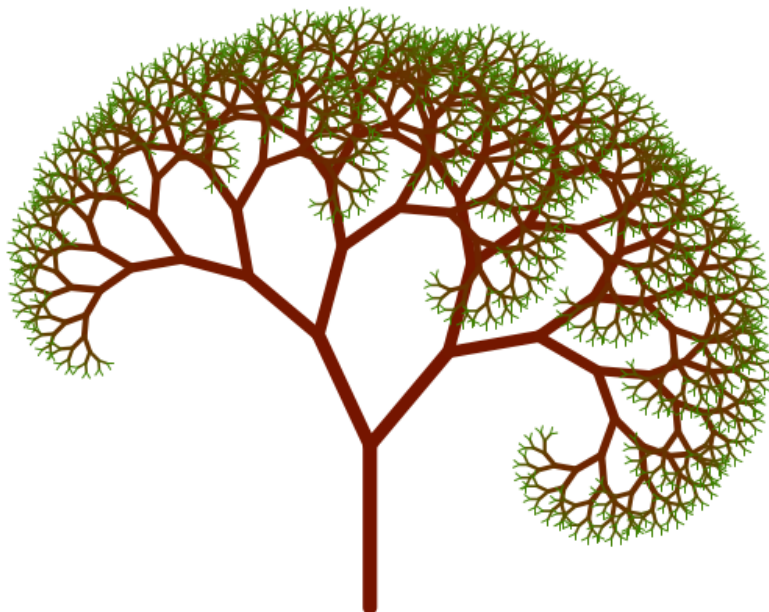
Définissez un algorithme qui teste si trois points définis par leurs coordonnées dans un certain repère sont alignés.



Recherche 5 - 31

Vecteurs de Noël

Quel lien entre cet arbre et les vecteurs ?



Centre No.						Paper Reference						Surname	Initial(s)	
Candidate No.						1	3	8	0	/	3	H	Signature	

Paper Reference(s)

1380/3H**Edexcel GCSE****Mathematics (Linear) – 1380****Paper 3 (Non-Calculator)****Vectors****Past Paper Questions****Arranged by Topic**

Examiner's use only

--	--	--

Team Leader's use only

--	--	--

**Materials required for examination**

Ruler graduated in centimetres and millimetres, protractor, compasses, pen, HB pencil, eraser.
Tracing paper may be used.

Items included with question papers

Nil

Instructions to Candidates

In the boxes above, write your centre number, candidate number, your surname, initials and signature.
Check that you have the correct question paper.

Answer ALL the questions. Write your answers in the spaces provided in this question paper.

You must NOT write on the formulae page.

Anything you write on the formulae page will gain NO credit.

If you need more space to complete your answer to any question, use additional answer sheets.

Information for Candidates

The marks for individual questions and the parts of questions are shown in round brackets: e.g. (2).
There are 26 questions in this question paper. The total mark for this paper is 100.

There are 24 pages in this question paper. Any blank pages are indicated.

Calculators must not be used.

Advice to Candidates

Show all stages in any calculations.

Work steadily through the paper. Do not spend too long on one question.

If you cannot answer a question, leave it and attempt the next one.

Return at the end to those you have left out.

Lots more free papers at:

<http://bland.in>

Compiled by Peter Bland

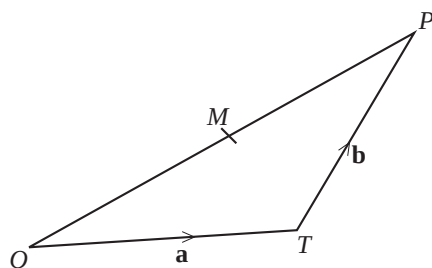


N 3 4 7 3 0 A 0 1 2 4

Turn over

edexcel 
advancing learning, changing lives

1.

Diagram **NOT**
accurately drawn

OPT is a triangle.
 M is the midpoint of OP .

$$\vec{OT} = \mathbf{a}$$

$$\vec{TP} = \mathbf{b}$$

(a) Express $\vec{OM}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

$$\vec{OM} = \dots\dots\dots (2)$$

(b) Express $\vec{TM}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.
 Give your answer in its simplest form.

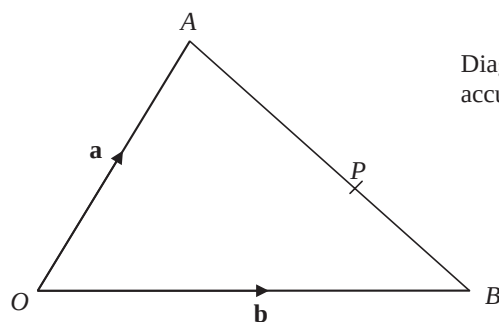
$$\vec{TM} = \dots\dots\dots (2)$$

(Total 4 marks)

Leave
blank

Q1

2.

Diagram **NOT**
accurately drawn OAB is a triangle.

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$$

(a) Find the vector $\overrightarrow{AB}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

$$\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots (1)$$

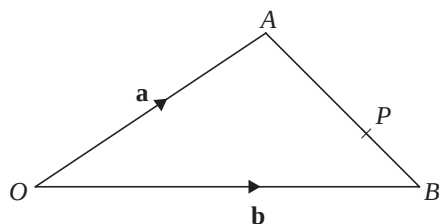
 P is the point on AB such that $AP : PB = 3 : 2$ (b) Show that $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$

(3)

Q2

(Total 4 marks)

3.

Diagram **NOT**
accurately drawn OAB is a triangle.

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$$

- (a) Find the vector
- $\overrightarrow{AB}$
- in terms of
- $\mathbf{a}$
- and
- $\mathbf{b}$
- .

$$\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots (1)$$

 P is the point on AB so that $AP : PB = 2 : 1$

- (b) Find the vector
- $\overrightarrow{OP}$
- in terms of
- $\mathbf{a}$
- and
- $\mathbf{b}$
- .
-
- Give your answer in its simplest form.

$$\overrightarrow{OP} = \dots\dots\dots (3)$$

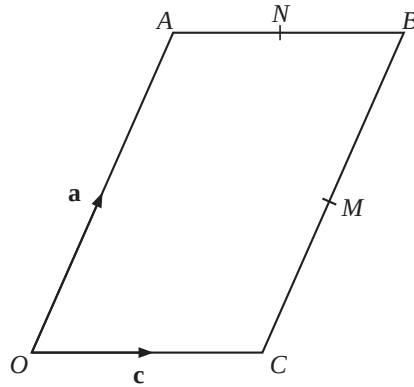
(Total 4 marks)

Leave
blank

Q3

Leave
blank

4.

Diagram **NOT**
accurately drawn

$OABC$ is a parallelogram.
 M is the midpoint of CB .
 N is the midpoint of AB .

$$\vec{OA} = \mathbf{a}$$

$$\vec{OC} = \mathbf{c}$$

(a) Find, in terms of $\mathbf{a}$ and/or $\mathbf{c}$, the vectors

(i) $\vec{MB}$,

.....

(ii) $\vec{MN}$.

.....

(2)

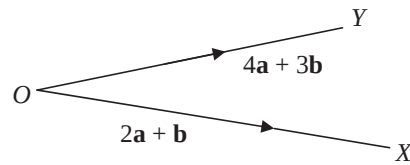
(b) Show that CA is parallel to MN .

(2)

Q4

(Total 4 marks)

5.

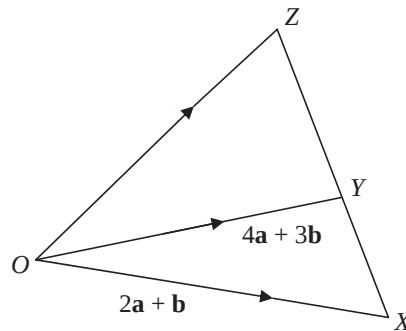
Diagram **NOT**
accurately drawnLeave
blank

$$\overrightarrow{OX} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{OY} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$$

- (a) Express the vector $\overrightarrow{XY}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$
Give your answer in its simplest form.

.....
(2)

Leave
blankDiagram **NOT**
accurately drawn

XYZ is a straight line.
 $XY : YZ = 2 : 3$

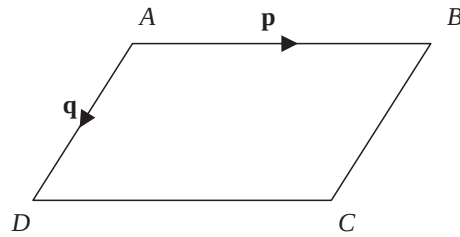
- (b) Express the vector $\overrightarrow{OZ}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$
 Give your answer in its simplest form.

.....
 (3)

(Total 5 marks)

Q5

6.

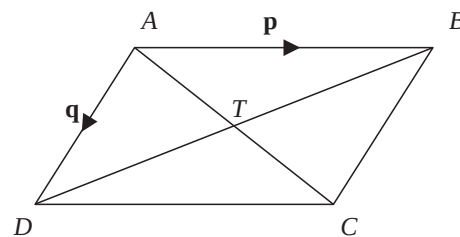
Diagram **NOT**
accurately drawn

$ABCD$ is a parallelogram.
 AB is parallel to DC .
 AD is parallel to BC .

$\vec{AB} = \mathbf{p}$
 $\vec{AD} = \mathbf{q}$

(a) Express, in terms of $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ (i) $\vec{AC}$

(i).....

(ii) $\vec{BD}$ (ii).....
(2)Diagram **NOT**
accurately drawn

AC and BD are diagonals of parallelogram $ABCD$.
 AC and BD intersect at T .

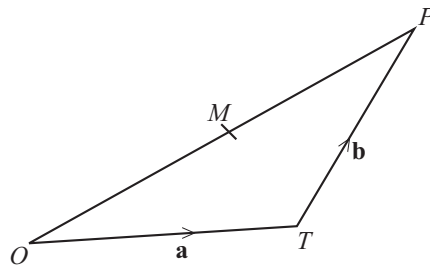
$\vec{AT}$ in terms of $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$.

.....
(1)

(Total 3 marks)

Q6

7.

Diagram **NOT**
accurately drawn

OPT is a triangle.
 M is the midpoint of OP .

$$\vec{OT} = \mathbf{a}$$

$$\vec{TP} = \mathbf{b}$$

(a) Express $\vec{OM}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

$$\vec{OM} = \dots\dots\dots (2)$$

(b) Express $\vec{TM}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.
 Give your answer in its simplest form.

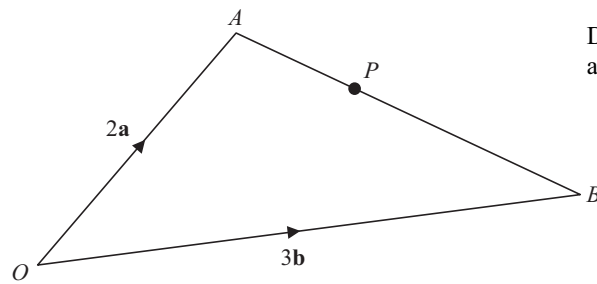
$$\vec{TM} = \dots\dots\dots (2)$$

(Total 4 marks)

Leave
blank

Q7

8.

Diagram **NOT**
accurately drawn OAB is a triangle.

$$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{b}$$

(a) Find $\overrightarrow{AB}$ in terms of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

$$\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots (1)$$

 P is the point on AB such that $AP : PB = 2 : 3$ (b) Show that $\overrightarrow{OP}$ is parallel to the vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.(3) **Q8****(Total 4 marks)**

Étude qualitative de fonctions



Juste quelques définitions concernant les variations de fonctions. Ces notions seront reprises tout au long de l'année.

1

Le programme officiel

Notions à découvrir : fonction croissante, fonction décroissante, maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.

- Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
- Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.
- Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations :
 - comparer les images de deux nombres d'un intervalle ;
 - déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.

Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique.

Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année.

Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.

2

Définitions

Définition 6 - 1

fonctions croissantes et décroissantes sur un intervalle

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite

- *croissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leq t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$;
- *décroissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leq t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \geq \varphi(t_2)$.

Autrement dit, une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre et une fonction décroissante est une fonction qui l'inverse.

On parle de fonction *strictement croissante* si $t_1 < t_2$ implique $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ et *strictement décroissante* si $t_1 < t_2$ implique $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$.

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction croissante « monte » de la gauche vers la droite et celle d'une fonction décroissante « descend ».

Exemple

Déterminer *graphiquement* le sens de variation de la fonction

$\varphi: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ étudiée précédemment.

$t \mapsto \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$

fonction constante

Définition 6 - 2

Une fonction φ est *constante* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quels que soient réels t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

fonction monotone

Définition 6 - 3

Une fonction est monotone sur un intervalle I si, et seulement si, elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur cet intervalle.

extremum local

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Un réel M est un *maximum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \leq M$$

Définition 6 - 4

C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe représentative de f sur l'intervalle J .

Un réel m est un *minimum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \geq m$$

C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe représentative de φ sur l'intervalle J .

Déterminez *graphiquement* les extrema locaux de la fonction

Exemple

$\varphi: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$ étudiée précédemment.

3

Tableau de variation

On représente parfois les variations d'une fonction par un tableau. La première ligne contient les valeurs importantes de la variable t , c'est à dire les bornes de l'intervalle de définition et les valeurs pour lesquelles le sens de variation change. La seconde ligne expose les variations de la fonction par des flèches et les images, si elles existent, des nombres présents dans la première ligne. En première, on y fera aussi apparaître les *limites* de la fonctions.

Par exemple, en reprenant une nouvelle fois la fonction $\varphi: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$

t	0	1	3	4
Variations de φ	10	$\frac{34}{3}$	10	$\frac{34}{3}$

4

Exercices



Recherche 6 - 1

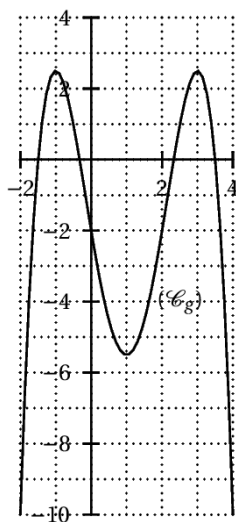
On donne le tableau de variations suivant :

x	-6	-1	2	7
$f(x)$	0		5	1
		-6		

1. Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
2. Comparer $f(3)$ et $f(4)$.
3. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-6; 7]$.
4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-6; -1]$.
5. Combien 4 a-t-il d'antécédents ? Justifier



Recherche 6 - 2



1. Donner le tableau de variations de la fonction g dont on a donné ci-contre la courbe représentative.
2. Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? Justifier. On ne demande pas les valeurs des solutions.
3. Résoudre l'équation $g(x) = -2$.
4. On donne :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 2.$$

Calculer l'image de 3.



Recherche 6 - 3

Voici le tableau de variations d'une fonction f :

x	-10	-6	-1	4
$f(x)$	5		3	
		-1		-5

Voici son tableau de signes :

x	-10	-7	-3	1	4			
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Tracer une représentation graphique de cette fonction.



Recherche 6 - 4

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 1.$$

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les images des nombres suivants : 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 et 2.
2. Quelle conjecture peut-on alors faire sur la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$?
3. Calculer $f(0,4)$.
4. Que peut-on dire de la conjecture précédente ?



Recherche 6 - 5

x	-5	-2	0	3
$f(x)$	4		3	-1
		1		

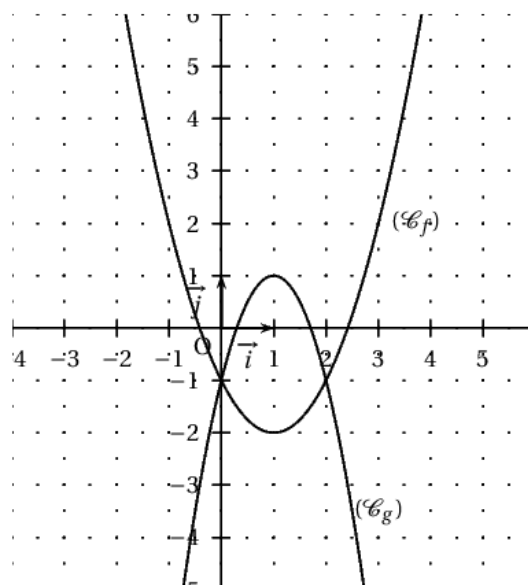
A l'aide du tableau de variations, indiquer si les égalités ou inégalités proposées sont vraies, fausses ou si le tableau des variations ne permet pas de conclure.

$f(-1) = 0$	
$f(-4) > f(-2)$	
$f(1) > f(2)$	
$f(-1) = 2$	
$f(-3) > 1$	
$f(-1) < f(-5)$	



Recherche 6 - 6

1. Résoudre graphiquement, en justifiant aussi précisément que possible, en donnant si besoin les valeurs approchées au dixième :
 - i. l'équation $f(x) = 0$;
 - ii. l'équation $f(x) = 2$;
 - iii. l'équation $f(x) = g(x)$;
 - iv. l'inéquation $f(x) \leq 0$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.





Recherche 6 - 7

En reprenant les théorèmes vus lors de l'étude de l'ordre, essayez de déterminer quel peut être le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$



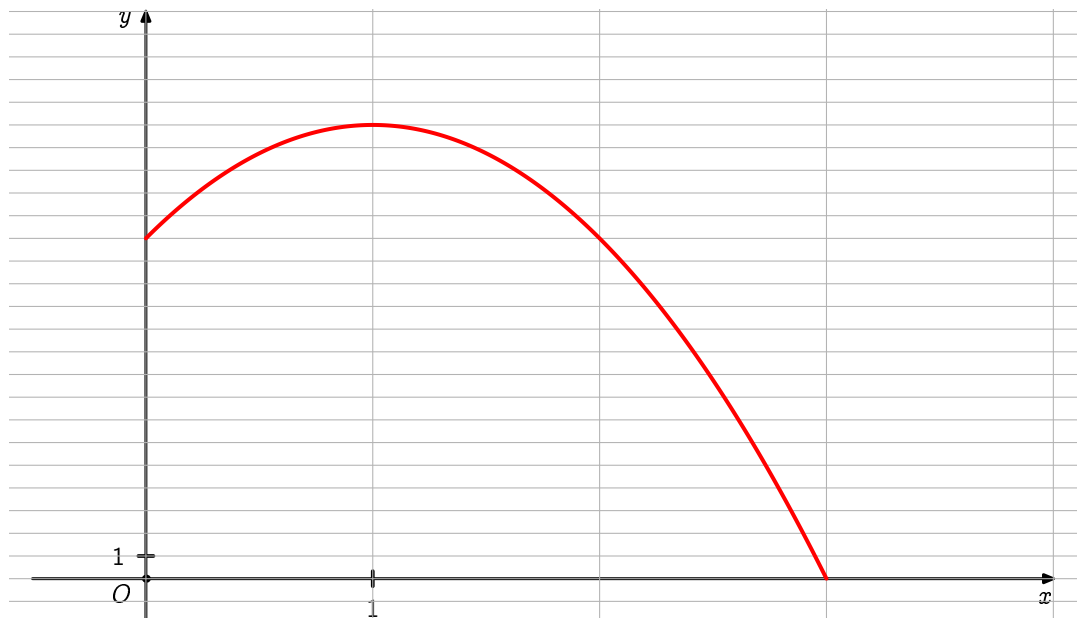
Recherche 6 - 8

Essayez d'étudier le sens de variations de fonctions du second degré quelconques. Y arrivez-vous tout le temps ? Y a-t-il des formes plus adaptées ?



Recherche 6 - 9

Un jeune syldave s'entraîne pour le championnat régional de lancer de brebis. Il s'est inscrit dans la catégorie « falaise » : il lance donc sa brebis vers le haut, depuis le sommet d'une falaise au bord d'un lac tranquille. La hauteur en mètres de la brebis par rapport à la surface de l'eau est une fonction f du temps en seconde, représentée par la courbe (P) suivante, qui est un segment de parabole.



Partie A : Étude graphique

Avec la précision permise par la lecture du graphique précédent, répondre aux questions suivantes.

1. À quelle hauteur se trouve la brebis au moment où le garçon la lance ?
2. Pendant combien de temps, la brebis reste-t-elle à une hauteur supérieure à la hauteur d'où elle a été lancée ?
3. Au bout de combien de temps la brebis touche-t-elle la surface de l'eau avant de s'y enfoncer ?
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la brebis et au bout de combien de temps cette hauteur est-elle atteinte ?
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Partie B : Etude théorique (A - 5 points)

La fonction f est définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$, où x désigne le temps en secondes et $f(x)$ la hauteur de la brebis par rapport à la surface de l'eau en mètres.

1. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire $20 - 5(x - 1)^2$.

2. En justifiant précisément chaque étape de la démarche, démontrer que f est croissante sur $[0; 1]$.
3. Factoriser $f(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$.
Que représente la solution dans l'expérience du lancer de la brebis ?
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 15$ (Penser à utiliser un tableau de signes).
Que représentent les solutions dans l'expérience du lancer de la brebis ?
5. Quel est l'âge de la brebis ?

Fonctions Affines



Les fonctions affines ont été largement étudiées au collège. Cette année, nous nous occuperons particulièrement de leurs signes. Nous reverrons les liens entre fonctions affines et droites ainsi que la résolution de systèmes.

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :

- donner le sens de variation d'une fonction affine ;
- donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b ;
- associer à un problème une expression algébrique ; mettre un problème en équation, en inéquation ;
- résoudre une équation se ramenant au premier degré ;
- déterminer une équation réduite de droite ;
- tracer une droite dont vous connaissez une équation réduite ;
- interpréter un coefficient directeur.

1

Le programme officiel

11 Le programme de 3^e

Ce que vous savez déjà :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonction linéaire. Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire. Fonction affine. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine d'une droite [Thèmes de convergence]	- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné. - Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image. - Représenter graphiquement une fonction linéaire. - Connaître et utiliser la relation $y = ax$ entre les coordonnées (x, y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \mapsto ax$. - Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite - Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné. - Connaître et utiliser la relation $y = ax + b$ entre les coordonnées (x, y) d'un point M qui est représentant une fonction affine. caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \mapsto ax + b$. - Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images. - Représenter graphiquement une fonction affine. - Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite. - Déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère.	L'utilisation de tableaux de proportionnalité permet de mettre en place le fait que le processus de correspondance est décrit par une formulation du type « je multiplie par a ». Cette formulation est reliée à $x \mapsto ax$. Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 est établi. Certains traitements des situations de proportionnalité utilisés dans les classes précédentes sont reliés aux propriétés d'additivité et d'homogénéité de la fonction linéaire. Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonctions affines. Pour les fonctions affines, la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence.

1 2 Le programme de 2^{nde}

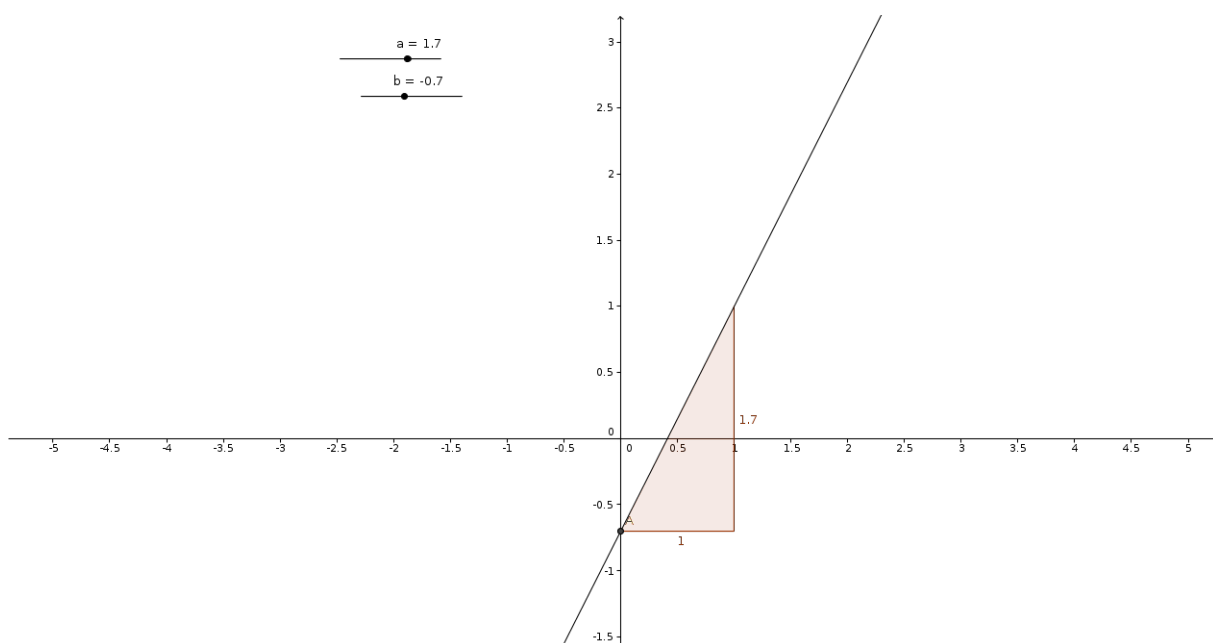
Ce qu'il reste à (re)voir :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions linéaires et fonctions affines	- Donner le sens de variation d'une fonction affine. - Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.
Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine. Équations de droites. Droites parallèles, sécantes.	- Tracer une droite dans le plan repéré. - Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite. - Caractériser analytiquement une droite. - Établir que trois points sont alignés, non alignés. - Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes. - Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$. On fait la liaison avec la colinéarité des vecteurs. C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

2 Synthèse du cours de Troisième**Recherche**

Racontez vos souvenirs de Troisième, cette période heureuse où les profs de maths étaient gentils, compétents, expliquaient bien le cours.

Voici ce que l'on peut animer sur GEOGEBRA :



3

Sens de variation d'une fonction affine

Recherche

Rappelez les définitions d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur un intervalle. Que pensez-vous du sens de variation d'une fonction affine. Comment démontrer votre intuition en s'appuyant sur les définitions précédentes ?

4

Étude du signe d'expressions affines

4.1 Valeurs critiques d'une expression

Mathémator : Vous verrez l'an prochain, si vous passez brillamment les épreuves de cette première année d'apprentissage Mathaïe, que la plupart du temps, nous résoudrons des inéquations pour étudier des signes. Je ne parle bien sûr pas des majestueux volatiles blancs.

Secondix (à part) : *Et en plus il m'impose ses blagues à deux centimes (tout haut)* Ah Ah Ah ! J'aimerais tant avoir votre humour.

Mathémator : Oh ! Ça me vient naturellement. Bon, revenons à nos inéquations. Avant toute étude de signe, il faudra repérer les dangers :

valeurs critiques

Soit $E(x)$ une expression où apparaît une variable x . Les *valeurs critiques* de l'expression $E(x)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont

Définition 7 - 1

- les valeurs de x dans I pour lesquelles $E(x)$ s'annule (appelées *racines* de l'expression) ;
- les valeurs de x dans I pour lesquelles $E(x)$ n'existe pas (appelées *valeurs interdites* de l'expression).

Secondix : Je demande à voir...

Mathémator : Voici quelques exemples :

Exemple

Rechercher les valeurs critiques de $3x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Il est clair $3x - 1 = 0$ si, et seulement si, $x = \frac{1}{3}$.

D'autre part, $3x - 1$ existe pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$.

L'expression $3x - 1$ admet donc exactement une valeur critique, $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur interdite.

Exemple

Rechercher les valeurs critiques de $x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $x^2 - 4 = 0$ équivaut à $(x - 2)(x + 2) = 0$. Il y a donc deux racines, 2 et -2.

D'autre part, $x^2 - 4$ existe pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de valeur interdite.

L'expression $x^2 - 4$ admet donc exactement deux valeurs critiques, 2 et -2, qui sont toutes deux des racines.

Exemple

Rechercher les valeurs critiques de $\frac{2x-5}{-x+7}$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\frac{2x-5}{-x+7} = 0$ équivaut à $2x - 5 = 0$. On obtient ainsi comme première valeur critique $\frac{5}{2}$, qui est l'unique racine de cette expression.

D'autre part, $\frac{2x-5}{-x+7}$ n'existe pas quand $-x + 7 = 0$. Pourquoi ?

Secondix: Ben on ne peut pas diviser par zéro.

Mathémator : La force est avec vous jeune Mathaïe !

On a donc une seconde valeur critique, la valeur interdite $x = 7$.

En conclusion, l'expression admet 2 valeurs critiques, la racine $\frac{5}{2}$ et la valeur interdite 7.

Propriété 7 - 1

Valeur critique d'une expression affine

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. L'expression $ax + b$ admet pour unique valeur critique son unique racine $x = -\frac{b}{a}$.

4 2 Valeurs témoins et signe d'une expression

Mathémator : On se place dans un intervalle I dont les bornes a et b sont éventuellement infinies :

Théorème 7 - 1

Changement de signe et valeur critique

Une expression dépendant de la variable x ne PEUT changer de signe que de part et d'autre d'une valeur critique.

Secondix: Excusez-moi de vous interrompre mais pourquoi cela ?

Mathémator : Je suis heureux de constater que votre esprit est en alerte. La preuve de ce résultat ne pourra vous être donnée qu'en année terminale de votre cycle de formation malheureusement. Pour une explication à notre niveau actuel, nous pouvons l'obtenir pour les expressions affines.

Recherche

Démontrez le théorème précédent dans le cas d'une expression affine.

Donnez des exemples où une expression ne change pas de signe autour d'une valeur critique.

À retenir

Détermination pratique du signe d'une expression sur un intervalle

On peut découper notre intervalle en petits intervalles sans point critique.

Sur ces petits intervalles, l'expression ne change pas de signe. Il suffit donc de tester sur une valeur témoin dans chaque mini intervalle.

Secondix: Cela semble très pratique... mais en fait je n'ai rien compris.

Mathémator : Fffffff... Bon, prenons un exemple :

Exemple

Déterminer le signe de $3x - 1$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$

On a vu que l'expression $3x - 1$ a exactement une valeur critique, $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur interdite. Il nous faut donc trouver le signe de $3x - 1$ sur les intervalles $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et $]\frac{1}{3}; +\infty[$.

Sur le premier intervalle, prenons la valeur témoin $x = 0$. On obtient alors $3 \times 0 - 1 = -1 < 0$, donc l'expression est négative sur cet intervalle.

Sur le second intervalle, prenons la valeur témoin $x = 1$. On obtient alors $3 \times 1 - 1 = 2 > 0$, donc l'expression est positive sur cet intervalle. On peut résumer ces informations dans le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x - 1$		$-$	$+$

Voyons un cas plus compliqué :

Exemple

Déterminer le signe de $x^2 - 4$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$.

On sait que l'expression $x^2 - 4$ admet exactement deux valeurs critiques, 2 et -2, qui sont toutes deux des racines. Il faut donc déterminer son signe sur les intervalles $] -\infty; -2[$, $] -2; 2[$ et $]2; +\infty[$. Pour cela on va choisir une valeur témoin dans chaque intervalle :

- sur $] -\infty; -2[$, en prenant $x = -3$ on obtient $(-3)^2 - 4 = 5 > 0$, donc l'expression $x^2 - 4$ est positive ;
- sur $] -2; 2[$, en prenant $x = 0$ on obtient $0^2 - 4 = -4 < 0$, donc l'expression $x^2 - 4$ est négative ;
- sur $]2; +\infty[$, en prenant $x = 3$ on obtient $3^2 - 4 = 5 > 0$, donc l'expression $x^2 - 4$ est positive.

On peut alors établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
Signe de $x^2 - 4$	$+$	$-$	$+$	

Et un autre avec une valeur interdite :

Exemple

Déterminer le signe de $\frac{2x-5}{-x+7}$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$.

On sait que cette expression admet 2 valeurs critiques, la racine $\frac{5}{2}$ et la valeur interdite 7. Il faut donc déterminer son signe sur les intervalles $] -\infty; \frac{5}{2}[$, $] \frac{5}{2}; 7[$ et $]7; +\infty[$. Pour cela on va choisir une valeur témoin dans chaque intervalle :

- sur $] -\infty; \frac{5}{2}[$, en prenant $x = 0$ on obtient $\frac{2 \times 0 - 5}{-0 + 7} = -\frac{5}{7} < 0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est négative ;
- sur $] \frac{5}{2}; 7[$, en prenant $x = 5$ on obtient $\frac{2 \times 5 - 5}{-5 + 7} = \frac{5}{2} > 0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est positive ;
- sur $]7; +\infty[$, en prenant $x = 10$ on obtient $\frac{2 \times 10 - 5}{-10 + 7} = -5 < 0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est négative.

On peut alors établir le tableau de signes suivant, où la valeur interdite est représentée par une double barre verticale :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	7	$+\infty$
Signe de $\frac{2x-5}{-x+7}$				

6

Exercices - Étude de signes / variations



Recherche 7 - 1

Build the sign tables of the following expressions, showing the computations leading to the critical values and involving the test values.

1. $2x - 5$;
3. $\frac{3}{7}x - 2$;
5. $7 - \frac{2}{3}x$;
7. $2 + \sqrt{2}x$;
2. $-3x + 4$;
4. $-2 - 12x$;
6. $-3 + 3x$.
8. $-3x + 7$.



Recherche 7 - 2

1. Quel est le sens de variation des fonctions $f : x \mapsto -x + 140$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{520}x - 800$?
2. Compléter les tableaux de *signes* suivants : (on expliquera la méthode utilisée, on pourra même en utiliser deux différentes...)

x	
$-\frac{3}{4}x + 5$	

x	
$\frac{x}{7} + \frac{3}{5}$	



Recherche 7 - 3

Variations et signe des fonctions affines

A- Un cas particulier

On considère dans cette partie la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.

1. Tracer la courbe de f à la calculatrice. Quelle semble être le sens de variation de f ?
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
 - i. Quel est le signe de la différence $a - b$?
 - ii. Puisque $f(x) = 2x - 5$, le nombre $f(a)$ est égal à $2a - 5$.
En remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par leurs expressions, calculer et factoriser l'expression $f(a) - f(b)$.
 - iii. En déduire le signe de $f(a) - f(b)$, puis en déduire l'ordre des nombres $f(a)$ et $f(b)$.
 - iv. Justifier alors le sens de variation de f .
3. Déterminer les valeurs de x qui annulent $f(x)$.
4. En utilisant la question précédente et les variations de f , déterminer le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x . On donnera la réponse sous forme de phrase puis sous forme de tableau de signe.

B- Le cas général

1. En traçant leurs représentations graphiques à la calculatrice, observer les variations des fonctions affines définies ci-dessous.

$$f_1(x) = -3x + 2$$

$$f_2(x) = x + 4$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$f_4(x) = -\frac{12}{7}x$$

$$f_5(x) = 5x - 5$$

$$f_6(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

Dans la suite, on considère une fonction affine quelconque définie par $f(x) = mx + p$.

2. En s'appuyant sur les résultats de la question précédente, proposer une méthode simple pour déterminer les variations de f .
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
 - i. Quel est le signe de la différence $a - b$?
 - ii. Étudier le signe de la différence $f(a) - f(b)$ en fonction des valeurs de m .
 - iii. En utilisant le résultat de la question précédente, ordonner les images $f(a)$ et $f(b)$ en fonction des valeurs de m .
 - iv. Conclure en rédigeant un théorème concernant le sens de variation d'une fonction affine quelconque.
4. Expliquer pourquoi il ne peut exister qu'une unique valeur de x telle que $f(x) = 0$.
5. Pour chacune des fonctions affines de la question 1 de cette partie, calculer la valeur de x annulant $f(x)$.
6. Dresser un tableau de signe pour chacune des fonctions de la question 1.
7. Proposer une méthode générale pour déterminer le signe d'une fonction affine.



Recherche 7 - 4

Écrire, sur le modèle de l'algorithme de l'exercice 7.2, un algorithme déterminant les variations d'une fonction affine.



Recherche 7 - 5

Temperatures

Two main temperature units are used in everyday life, the Celsius and Fahrenheit degrees. The formulas to switch from one to the other is as follows : if x is the temperature in Celsius, then the temperature in Fahrenheit is

$$f(x) = \frac{9}{5}x + \frac{288}{5}.$$

1. Turn into fahrenheit degrees the following temperatures in Celsius : 0, 5, 20, 35, 100. Give the results in a table of values.
2. What kind of function is f ?
3. Prove that as the temperature in Celsius increases, so does the temperature in Fahrenheit.
4. Find the Celsius temperature that gives a Fahrenheit temperature equal to 0.
5. Study the sign of the function f .
6. Is it often that we get, in England, a negative Fahrenheit temperature ?



Recherche 7 - 6

QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, choisir la ou les

bonne(s) réponse(s).

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Soit $f : x \mapsto 1 - 2x$, alors	(a) $f(-1) = -2$ (b) 0 a pour antécédent 1 (c) $f(2) = -3$
2. La représentation graphique de $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$ passe par	(a) $A(-3; -5)$ et $B(3; -1)$ (b) $A(-3; -5)$ ou $B(3; \frac{2}{3})$ (c) $A(6; -1)$ et $B(3; -1)$
3. L'expression $-2x + 6$ est	(a) positive sur $[6; +\infty]$ (b) positive sur $[3; +\infty]$ (c) négative sur $[6; +\infty]$
4. La fonction $f(x) = 2x$ est	(a) croissante (b) linéaire (c) affine
5. La fonction $g(x) = -5 + x$ est	(a) croissante (b) décroissante (c) monotone



Recherche 7 - 7

On donne ci-dessous 5 fonctions affines :

$$f(x) = 4x - 2 \quad ; \quad g(x) = 5 \quad ; \quad h(x) = 2x \quad ; \quad i(x) = -2x + 2 \quad ; \quad j(x) = 4 - 2x$$

1. Dresser le tableau de variation de chacune de ces fonctions.
2. Dresser le tableau de signe de chacune de ces fonctions.
3. Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer les représentations graphiques de ces fonctions.



Recherche 7 - 8

In this exercise we will extend the method of the sign table to products of linear expressions.

1. Give the signs of the expressions $3x - 15$ and $-5x - 7$ in a sign table.
2. Use the previous question to copy and fill the next table.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	5	$+\infty$
sign of $3x - 15$				
sign of $-5x - 7$				

3. Add a row to the new table where you will show the sign of the product $(3x - 15)(-5x - 7)$ over each interval.

4. Use the last row of the table to solve the inequations $(3x - 15)(-5x - 7) > 0$ and $(3x - 15)(-5x - 7) \leq 0$.


Recherche 7 - 9

Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

1. $(2x + 7)(-3x + 1)$;
3. $(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3})(x + 2)$;
5. $5x^2(-2x + 8)$;
2. $(-4x - 8)(-5x + 12)$;
4. $x(-x + 5.2)$;
6. $-4x(7x + 8)$.


Recherche 7 - 10

Déterminer le signe des quotients suivants en fonction de la valeur de x et donner le résultat sous forme de tableau.

1. $\frac{2x + 7}{-3x + 1}$;
3. $\frac{6 - 3x}{2x + 1}$;
5. $\frac{2x}{3x + 5}$;
2. $\frac{-x + 5.2}{x}$;
4. $\frac{13 + 6x}{4 - x}$;
6. $\frac{1.3x + 9}{-5x}$.


Recherche 7 - 11

Résolvez les problèmes suivant :

1. Étudiez le signe de $(2x + 3)(2 - 3x)$
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ $(x^2 - 4)(x^2 + 9) \geq 0$
3. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles l'expression $\sqrt{(2 - x)(x - 5)(x^2 + 1)}$ est définie ?
4. Quel est le signe de Zorro ?


Recherche 7 - 12

1. Développer, réduire et ordonner l'expression : $(x + 3)^2 - 16$.
2. Factoriser l'expression : $(x + 3)^2 - 16$.
3. À l'aide d'un tableau de signe, résoudre l'inéquation : $(x - 1)(x + 7) < 0$.


Recherche 7 - 13

Résolvez les inéquations proposées en n'oubliant pas de préciser d'abord l'ensemble de définition.

$$\frac{2(x + 5) - 1}{x + 3} > 0 \quad \frac{3 - x}{x + 3} \leq 2 \quad \frac{4 + x}{x} \leq \frac{2x + 1}{2x - 1} \quad \frac{4x}{(x + 2)^2} > \frac{4}{x + 2}$$


Recherche 7 - 14
Money

In this exercise, we look at the problem of currency exchange.

A- The official exchange rate

As of April 6, 2010, one euro was equivalent to 0.88 UK pounds.

1. Convert the following amounts into *UK* pounds : 5 euros, 20 euros and 75 euros.
2. Find out the formula of the function p that converts euros into UK pounds.
3. What are the variations of the function p ? Use this result to fill out the following sentence : The ... euros you convert, the ... pounds you get.

B- Two bank services

A bank is offering a currency exchange service. They charge a 5 euros commission for any operation, and offer a rate of 0.85 pounds for 1 euro.

1. In that bank, how many pounds would you get for 5 euros, 20 euros and 75 euros?
2. Find the formula of the function b_1 giving the amount in UK pounds you would get for x euros in this bank.
3. What are the variations of the function b_1 ?
4. Solve the equation $b_1(x) = 0$ and study the sign of $b_1(x)$ over the interval $[0, 100]$.

Another bank is offering a rate of 0.75 pounds for 1 euro, with no commission.

5. In that bank, how many pounds would you get for 5 euros, 20 euros and 75 euros?
6. Find the formula of the function b_2 giving the amount in UK pounds you would get for x euros in the second bank.
7. What are the variations of the function b_2 ?
8. Study the sign of $b_2(x)$ over the interval $[0, 100]$.

C- Comparing the two banks

A UK visitor has to decide what bank to choose for a currency exchange operation. To do so, let's define a function f by the formula $f(x) = b_2(x) - b_1(x)$.

1. Find the formula for f .
2. Explain how function f can be used to help the visitor decide what bank to go to.
3. What are the variations of the function f ?
4. Find the solution of the equation $f(x) = 0$.
5. Help the visitor decide what bank he should go to.



A farmer has bought 48 yards of fence to build a rectangular enclosure for a diplodocus. Let x be the length of the smallest side of the enclosure and y the length of the longest side.



1. Prove that $y = 24 - x$.
2. Compute the area of the enclosure as a function of x .

The farmer wants the enclosure to have an area of at least 135 square yards. He wants to know what are the possible lengths for the sides to do so.

3. What inequation must we solve to answer to this problem?
4. Check that this inequation is equivalent to $(x - 15)(x - 9) \leq 0$.
5. Solve this new inequation using a sign table.
6. Conclude.



Recherche 7 - 16

A company is building urinals in large quantities. Let x be the number of thousands of urinals built. Each urinal is sold at the price of £15 per unit. We call $S(x)$ the total of the sales, in thousand of pounds.



1.
 - i. Compute $S(1)$, $S(2)$ and $S(3)$.
 - ii. Find the general formula for $S(x)$.
2. The cost of fabrication of x thousand of urinals has been proved to be close to $C(x) = 25x^2 - 85x + 75$.
 - i. Prove that the balance of the company is equal to $B(x) = -25x^2 + 100x - 75$.
 - ii. Prove that $B(x) = 25(1 - x)(x - 3)$.
 - iii. What equation must we solve to find out for how many urinals the company will have a positive balance?
 - iv. Solve this equation using a sign table.



Recherche 7 - 17

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$.

1. Réduisez $f(x)$ au même dénominateur.
2. Résolvez par le calcul l'équation $f(x) = 0$.
3. Résolvez par le calcul l'inéquation $f(x) < 0$.
4. Résolvez par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 3$.
5. Résolvez par le calcul l'équation $f(x) = x + 5$.
6. Résolvez par le calcul l'inéquation $f(x) < x + 5$.

7

Exercices - Droites et fonctions affines



Recherche 7 - 18

Dans la liste suivante, reconnaître les fonctions affines et les fonctions linéaires. Vérifier la réponse en traçant sur la calculatrice la représentation graphique de chaque fonction.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------|--|
| 1. $f_1(x) = 3x + 1$; | 5. $f_5(x) = \frac{9x}{7}$; | 9. $f_9(x) = (2x - 1)^2$; |
| 2. $f_2(x) = -x$; | 6. $f_6(x) = -2x + \sqrt{2}$; | 10. $f_{10}(x) = 2x - 1^2$; |
| 3. $f_3(x) = 25$; | 7. $f_7(x) = \frac{4x-6}{2}$; | 11. $f_{11}(x) = \sqrt{3x+2}$; |
| 4. $f_4(x) = 2x^2 - 5$; | 8. $f_8(x) = \frac{2}{4x-6}$; | 12. $f_{12}(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{2}$. |



Recherche 7 - 19

L'algorithme suivant concerne une fonction de la forme $f(x) = ax + b$. Compléter les pointillés.

```

begin
  Input:  $a, b$  nombre réel ;
  if  $a = 0$  then
    Output: "La fonction est ... " ;
  else
    if  $b = 0$  then
      Output: "La fonction est ..." ;
    else
      Output: "la fonction est ..." ;
    end
  end
end
end

```



Recherche 7 - 20

On travaille dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminez les équations réduites des droites suivant :

1. (D_1) qui passe par $A(1; 2)$ et qui a pour coefficient directeur -2 ;
2. (D_2) qui passe par $B(-1; 2)$ et $C(4; -3)$;
3. (D_3) qui est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$ et qui passe par A ;
4. (D_4) qui est parallèle à l'axe des ordonnées et qui passe par $E(37; -193\sqrt{\pi})$.



Recherche 7 - 21

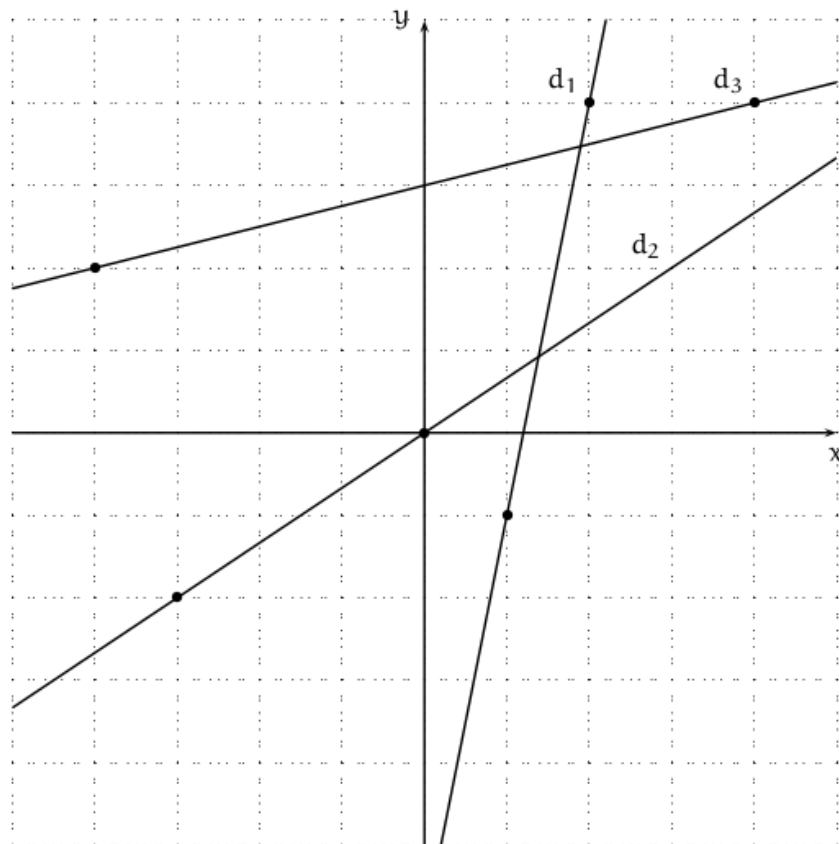
Six équations de droites sont données ci-dessous.

- | | | |
|---|---|---|
| — $d_1 : 3x - 3y + 3 = 0$; | — $d_3 : \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$; | — $d_5 : y + 1 = 2(x + 5)$; |
| — $d_2 : y - 2 = -6(x - \frac{1}{3})$; | — $d_4 : -2x + 5y + 1 = 0$; | — $d_6 : \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$. |

Déterminez leurs coefficients directeurs respectifs et les coordonnées de leurs intersections avec l'axe des abscisses.



Recherche 7 - 22



Les droites d_1 , d_2 et d_3 ci-contre représentent respectivement les fonctions affines f_1 , f_2 et f_3 .

Déterminer les expressions de chacune de ces fonctions en utilisant les coordonnées des points mis en évidence sur le graphique.



Recherche 7 - 23

SAT

If the line of slope $3/5$ contains the point $(3, 1)$, then it must also contain which of the following points?

1. $(-2, -2)$ 2. $(-1, 4)$ 3. $(0, 0)$ 4. $(2, -1)$ 5. $(3, 4)$



Recherche 7 - 24

SAT

The line $y - 1 = 5(x - 1)$ contains the point $(0, n)$. What is the value of n ?



Recherche 7 - 25

SAT

What is the slope of the line whose equation is $2y - 13 = -6x - 5$?



Recherche 7 - 26

SAT

What is the slope of the line that passes through the origin and the point $(-3, 2)$?

**Recherche 7 - 27****AS-level**

Eight points have coordinates as follows. $A(3, 5)$, $B(6, 10)$, $C(8, 3)$, $D(6, -2)$, $E(0, -5)$, $F(-4, -7)$, $G(-1, -4)$, $H(-4, 2)$.

1. Find the gradients of the lines (AF) , (HD) , (AD) , and (CH) .
2. Show that the points D, E and F are on the same line.
3. Show that (AC) is parallel to (DH) .

**Recherche 7 - 28****AS-level**

Find the gradients and y -intercepts for the lines with the following equations.

- | | | | |
|-----------------|---------------------|--------------------------------------|------------|
| 1. $y = x + 2$ | 3. $2x + y = 0$ | 5. $\frac{1}{8}x + \frac{5}{4}y = 6$ | 7. $x = 5$ |
| 2. $y = 2 - 3x$ | 4. $x + 2y + 7 = 0$ | 6. $y = 7$ | 8. $x = y$ |

**Recherche 7 - 29****AS-level**

State the gradient of the following lines :

1. $y = 7x + 6$
2. $x = 7y + 6$
3. A line which passes through the x -axis at $-2/3$ and through the y -axis at $4/9$.
4. A horizontal line which passes through the point $(\pi, -7, 12)$.

**Recherche 7 - 30****Edexcel**

The points A and B have coordinates $(2, 16)$ and $(12, -4)$. A straight line ℓ_1 passes through A and B.

1. Find an equation for ℓ_1 in the form $ax + by = c$.
2. The line ℓ_2 passes through the point C with coordinates $(-1, 1)$ and has gradient $1/3$. Find an equation for ℓ_2 .

**Recherche 7 - 31****Révisions de Troisième**

Un industriel est spécialisé dans la fabrication de crème contre l'acné.

L'industriel reçoit des commandes de différentes régions de France.

Pour la livraison des produits, il s'adresse alors à deux sociétés de transport et compare leurs tarifs :

- tarif 1 : £3,50 par mile parcouru ;
- tarif 2 : £2 par mile parcouru avec en plus un forfait fixe de £150.

Soit y_1 le prix (en £) du transport avec le tarif 1 pour x miles parcourus.

Soit y_2 le prix (en £) du transport avec le tarif 2 pour x miles parcourus.

1. i. Reproduire et compléter le tableau suivant :

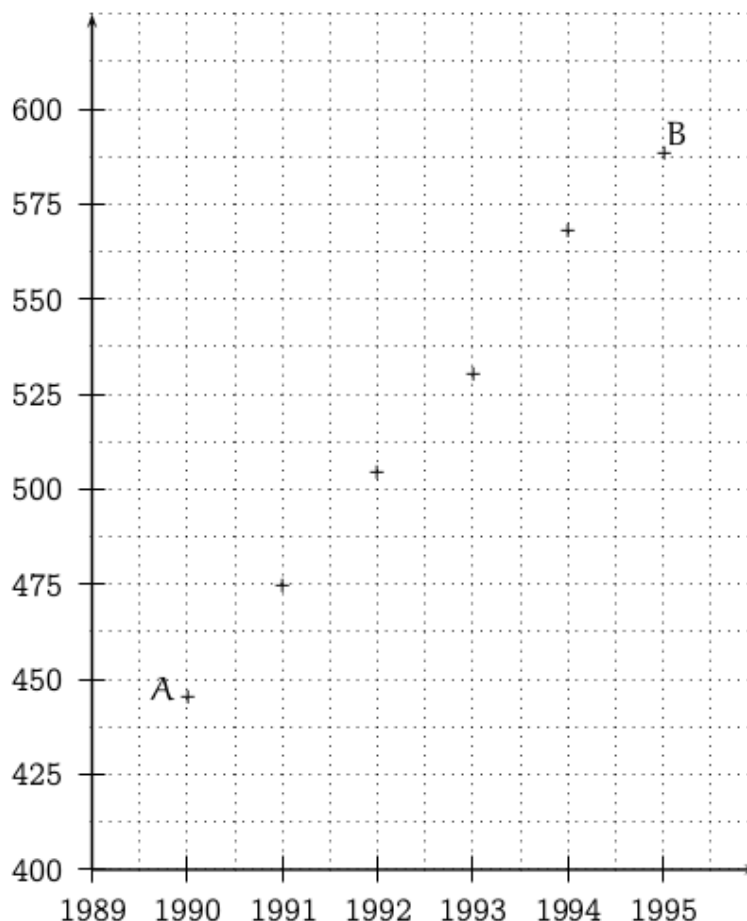
x (en miles)	50		150		300
y_1 (en £)		420			
y_2 (en £)				670	

- ii. Quel est le tarif le plus avantageux pour 50 miles parcourus ? Et pour 300 miles parcourus ?
2. Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x .
3. Tracer la droite (d_1) représentant la fonction $f_1 : x \rightarrow 3,5x$ et la droite (d_2) représentant la fonction $f_2 : x \rightarrow 2x + 150$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour représenter 25 miles, et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour £50.
Pour des raisons pratiques, prendre l'origine du repère en bas et à gauche de la feuille.
4.
 - i. Déterminer graphiquement le nombre de miles à partir duquel il est plus avantageux pour l'industriel de choisir le tarif 2 (on laissera visible les pointillés nécessaires à la lecture graphique).
 - ii. Retrouver ce dernier résultat par le calcul.
5.
 - i. Résoudre l'équation $2x + 150 = 500$. À quoi correspond, pour ce problème, la solution de cette équation ?
 - ii. Sur le graphique, retrouver la solution de l'équation précédente : on laissera visibles les traits pointillés utiles.



Recherche 7 - 32

Le ministère de l'Éducation Syldave a publié en 1997 la progression des dépenses d'emprisonnement des élèves paresseux de 1990 à 1995. Ces données sont représentées graphiquement (tableau et graphique ci-dessous).



Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Dépense en milliards de Sprounz	445,5	474,5	504,8	530,2	568,2	588,5

On décide d'approcher la courbe représentant ces dépenses par la droite Δ passant par les points A et B .

1. Donner les coordonnées des points A et B en utilisant le tableau.
2. Calculer le coefficient directeur de la droite Δ .
3. On note f la fonction affine représentée par la droite Δ . Déterminer l'expression $f(x)$.
4. Calculer les coordonnées du point moyen G ayant pour coordonnées les moyennes des coordonnées des 6 points. Appartient-il à Δ ?
5. On suppose que cette évolution s'est maintenue les années suivantes. Évaluer la dépense globale en 2008.

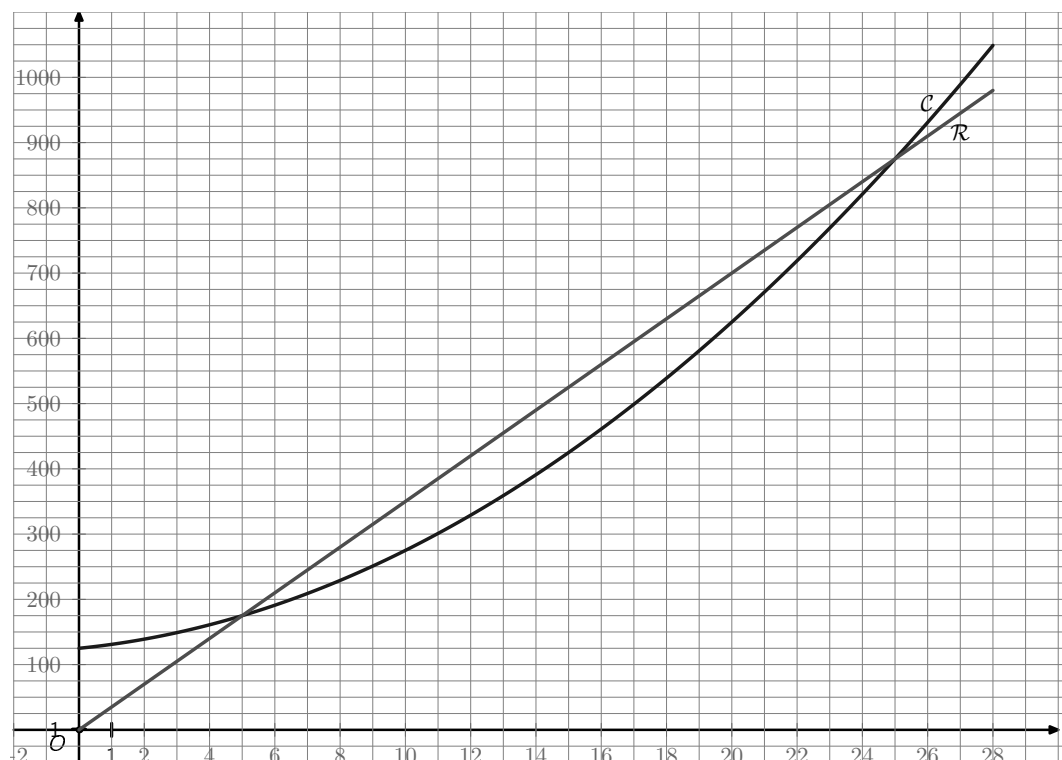


Recherche 7 - 33

En janvier 2000, M. Chaprot a créé une entreprise qui fabrique des épilateurs de poils de nez à condensateurs mégathermicosensorielhydropulsés fonctionnant à l'énergie éolienne. Comme il a du mal à trouver des employés assez qualifiés pour une telle besogne, il ne peut pas fabriquer plus de 35 épilateurs par mois.

On sait que l'entreprise parvient à vendre toute sa production en Syldavie, quelque soit le nombre d'épilateurs fabriqués, car M. Chaprot est le cousin par alliance du beau-frère de la femme de chambre de la nouvelle maîtresse italienne du Guide Suprême de ce bucolique pays et bénéficie d'un contrat exclusif de vente obligatoire aux ministres syldavés.

Lectures graphiques



Sur le graphique, on a représenté :

- le coût total de production (charges, salaires, matériel, pots de vin, etc.) en centaines d'euros, en fonction du nombre d'épilateurs produits (courbe C) ;
- la recette totale, en centaines d'euros, engendrée par la vente de ces x épilateurs (droite R passant par O .)

Par exemple, 450 sur l'axe des ordonnées se lit 45 000 euros.

1.
 - i. Est-ce que la recette est proportionnelle au nombre d'épilateurs vendus ?
 - ii. Quel est le montant des coûts fixes ?
2.
 - i. Donnez le coût total de production de 10 épilateurs et faites apparaître le tracé sur le graphique.
 - ii. Déduisez-en le coût unitaire de production pour une production de 10 épilateurs.
 - iii. Quel est le coût unitaire si l'on fabrique 15 épilateurs.
3.
 - i. Donnez, en justifiant votre réponse, le bénéfice réalisé par l'entreprise suite à la production et à la vente de 10 épilateurs.
 - ii. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices quelque soit le nombre d'épilateurs fabriqués ?

Étude de la fonction bénéfice

Les courbes R et C représentent en fait les fonctions r et c définies sur $[0 ; 35]$ par :

$$r(x) = 35x \quad \text{et} \quad c(x) = x^2 + 5x + 125$$

1. Calculez $B(x)$ en fonction du nombre x d'épilateurs vendus, avec B la fonction bénéfice.
2.
 - i. Montrez que $B(x) = -(x - 5)(x - 25)$.
 - ii. Dressez un tableau donnant le signe de B sur $[0 ; 35]$.
 - iii. Combien d'épilateurs M. Chaprot doit-il produire (ou plutôt ses ouvriers) pour gagner de l'argent ?
3.
 - i. Montrez que $B(x) = -(x - 15)^2 + 100$.
 - ii. Quelle doit être la production pour obtenir un bénéfice maximum ?
 - iii. Y a-t-il un lien entre le coût unitaire et le bénéfice ?

Bénéfice futur

1. L'entreprise a réalisé un bénéfice de 10 000 euros en 2000. À la fin de l'année, après impôts, investissements forcés dans l'économie syldave, financement du mariage secret du Guide Suprême syldave, fonds versés à la caisse noire du Parti du Rassemblement Syldave, paiement des vacances de la famille Chaprot aux Maldives, il reste à l'entreprise un bénéfice net représentant 8% du bénéfice brut initial. Calculez ce bénéfice net.
2. En payant moins les ouvriers et en faisant chanter les ministres pour qu'ils achètent plus cher les épilateurs, M. Chaprot augmente ses bénéfices nets de 11% par an. Quel bénéfice peut-il envisager en 2010 ?
3. À partir de quelle année pourra-t-il obtenir un bénéfice net supérieur à 30 000 euros ?



Recherche 7 - 34

Nucléaire

En 1990, une centrale atomique a été créée. Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution du pourcentage des salariés ayant quatre oreilles par rapport au total des salariés de la centrale.



Le tableau suivant donne, pour les années indiquées, le nombre x d'années écoulées depuis 1990 et le pourcentage y de salariés à quatre oreilles correspondant.

Année	1992	1994	1995	1998	1999	2001	2002	2003
x	2	4	5	8	9	11	12	13
y (en %)	8,9	10,2	10,5	12,2	12,3	13,2	13,8	14,9

1. Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, représenter le nuage des points M de coordonnées $(x; y)$.
2.
 - i. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage, c'est à dire le point de coordonnées (moyenne des abscisses, moyenne des ordonnées)
 - ii. Placer le point G sur le graphique précédent.
3. Soit D la droite passant par le point G et de coefficient directeur 0,5.
 - i. Tracer la droite D sur le graphique précédent.
 - ii. Déterminer une équation de la droite D .
4. On réalise, à l'aide de la droite D un ajustement affine du nuage représenté à la question 1., c'est à dire qu'on suppose que l'évolution du pourcentage de salarié à quatre oreilles peut être modélisé par la fonction affine correspondant à la droite D . À l'aide de cet ajustement, déterminer graphiquement :
 - i. le pourcentage de salariés à quatre oreilles dans l'entreprise en 2000 ;
 - ii. en quelle année le pourcentage des salariés à quatre oreilles dans l'entreprise atteindra 16 %.

Pour ces deux questions, les traits nécessaires à la lecture devront figurer sur le graphique.
5. Retrouver par le calcul les résultats de la question précédente à l'aide de l'équation de D obtenue à la question 3. b..



Ténias

La croissance observée en centimètres suivant l'âge est indiquée dans le tableau ci-dessous :

âge du ténia en années	1	2	3	4	5
taille en centimètres	23	36	43	55	62

La longévité de l'espèce (âge maximal) est évaluée à neuf années.

Très nombreux à la naissance, les ténias se font plus rares à l'âge adulte, les spécimens très âgés devenant exceptionnels. Ainsi sur 1000 ténias qui viennent de naître, seuls 10 parviendront à l'âge de 8 ans.



Le graphique suivant représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.

1. Un ajustement linéaire du nuage semble-t-il justifié ?
2. On désigne par G_1 le point moyen du trois premiers points du nuage et par G_2 celui des deux derniers
 - i. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.
 - ii. Montrer que la droite (G_1G_2) admet pour équation réduite : $y = 9,8x + 14,4$.
 - iii. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et montrer qu'il appartient bien à la droite (G_1G_2) .
Placer le point G sur le graphique.
3. On admet que cette droite constitue une bonne modélisation de la taille du ténia en fonction de son âge.
 - i. Résoudre algébriquement l'inéquation $9,8x + 14,4 > 200$. Est-il vraisemblable qu'un ténia dont la taille dépasse 200 centimètres puisse être observé ?
 - ii. Résoudre graphiquement l'équation $9,8x + 14,4 = 100$.
En déduire l'âge d'un ténia mesurant 100 centimètres . (On donnera la valeur entière la plus proche et on laissera apparents les traits de construction).

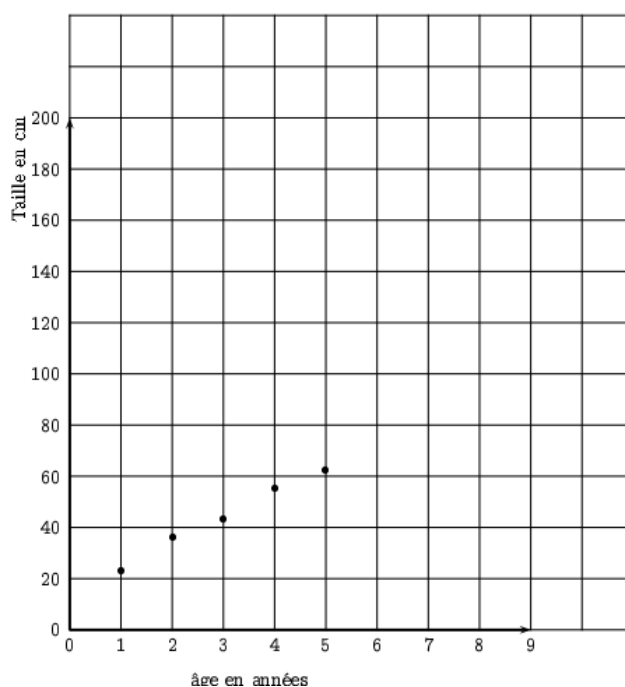


FIGURE 7.1 – Évolution de la taille d'un ténia en fonction de son âge

**Recherche 7 - 36****Élèves de Seconde 22**

On met en contact des élèves de seconde 22 avec un agent antiparasite. Dans le tableau ci-dessous, t_i désigne le temps (en minutes) d'exposition des élèves à l'agent antiparasite, y_i désigne le nombre de survivants sur 10^6 élèves.

t_i	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	120	67	49	27	20	9	7	3
$z_i = \ln y_i$								

Vous trouverez une touche  sur votre calculatrice.

1. Recopier le tableau en complétant la dernière ligne $z = \ln y_i$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien : vous vous contenterez d'utiliser la touche $\ln$ de votre calculatrice.
Donner les résultats arrondis à 10^{-1} près.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(t_i ; z_i)$ dans un repère orthogonal (*unités graphiques 2 cm pour 10 minutes en abscisse et 2 cm pour une unité en ordonnée*).
3.
 - i. Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point moyen G_2 associé aux quatre derniers points du tableau.
 - ii. Tracer la droite $(G_1 G_2)$.
 - iii. Une équation de la droite $(G_1 G_2)$ est de la forme $z = at + b$. Calculer les nombres réels a et b .

**Recherche 7 - 37****A-Level 2015 - AQA P1**

The line (AB) has equation $3x + 5y = 7$.

1. Find the gradient of (AB) .

2. The line (AC) has equation $2x - 3y = 30$. Find the coordinates of A.



Recherche 7 - 38

A-Level 2015 - AQA P1

The point P has coordinates $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ and the point Q has coordinates $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$. Show that the gradient of PQ can be expressed as $n + \sqrt{15}$, stating the value of the integer n .



Recherche 7 - 39

A-Level 2014 - AQA P1

The point A has coordinates $(-1, 2)$ and the point B has coordinates $(3, -5)$.

- Find the gradient of (AB) .
- Hence find an equation of the line (AB) , giving your answer in the form $px + qy = r$, where p , q and r are integers.

8

Résolution de systèmes 2x2 à la calculatrice

8 1 Préparons le programme

Le but de notre activité est de construire un programme qui résoudra de manière exacte un système de la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

les a_i et les b_i étant des entiers relatifs donnés.

- À quelle condition ce système admettra-t-il un unique couple solution ?
- Nous supposons par la suite que cette condition est vérifiée. Résolvez ce système, c'est-à-dire exprimez les *variables* x et y en fonction des *paramètres* a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 et c_2 .
- Peut-on utiliser ces formules si la condition de la question 1 n'est pas vérifiée ?

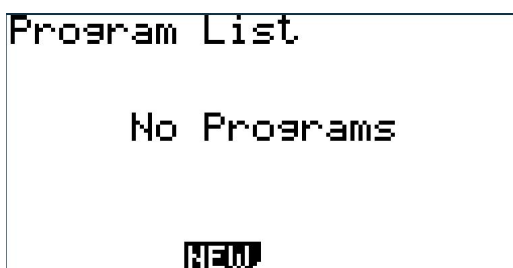
8 2 Programmons la calculatrice

Nous voulons résoudre les systèmes du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

8 2 1 Avec une CASIO

On ouvre une fenêtre de programme en sélectionnant .
On obtient :



On choisit un nom, par exemple SYSL22

```

Program Name
[SYSL22 ]

[RUN] [BASE] [→] [SWEL]

```

Ensuite il va falloir prévoir l'entrée par l'utilisateur des coefficients $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Pour a_1 cela donne :

```

=====SYSL22 =====
"A1":?→A1

[TOP] [BTM] [SRC] [MENU] [A↔B] [CHAR]

```

Pour les lettres, les chiffres et les guillemets on utilise le clavier après avoir tapé **[ALPHA]**. Pour la flèche, c'est la touche **[→]**. Pour ?, on va chercher dans le menu des programmes en tapant **[SHIFT] [VARS]**. Le symbole **↵** s'obtient en tapant **[EXE]**. On arrive donc à cet écran :

```

=====SYSL22 =====
"A1"?→A↵
"B1"?→B↵
"C1"?→C↵
"A2"?→D↵
"B2"?→E↵
"C2"?→F↵
[COM] [CTL] [JUMP] [?] [↵] [↵]

```

Ensuite il faut créer les variables locales qui seront calculées à l'intérieur du programme et n'en sortiront pas. Il s'agit des déterminants. Pour nommer les variables, on ne peut utiliser que les 26 lettres de l'alphabet :

```

=====SYSL22 =====
"A2"?→D↵
"B2"?→E↵
"C2"?→F↵
A×E-D×B→G↵
C×E-F×B→H↵
F×A-C×D→I↵
[COM] [CTL] [JUMP] [?] [↵] [↵]

```

Il ne reste plus qu'à demander les résultats. Il faudra distinguer le cas où le déterminant du système est nul ou pas.

On va utiliser les commandes « If...Then...Else...IfEnd » accessibles dans le menu PGRM en tapant **[SHIFT] [VARS]** puis en allant dans l'onglet COM.

Les deux points permettent d'afficher en même temps le texte entre guillemets et le résultat calculé H/G. Ils sont accessibles dans le menu PGRM.

Le petit triangle ▲ est obtenu dans le même menu. Il demande de faire une pause dans le programme pour que l'utilisateur ait le temps de lire la valeur.

Les symboles = et ≠ s'obtiennent dans le même menu dans l'onglet REL.

```

=====SYSL22 =====
If G=0#
Then "PAS DE SOL UNIQ
UE"#
Else "X=":H,G,
"Y=":I,G#
IfEnd#
COM CTL JUMP ? ▲ ▸

```

On sort alors de l'affichage du programme en tapant plusieurs fois **EXIT**.

```

Program List
SYSL22 : 156
EXE EDIT NEW DEL DELA ▸

```

Il reste à l'exécuter en tapant sur **EXE**.

Pour résoudre :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

on entre les différentes valeurs des coefficients :

```

1
A2?
2
B2?
-1
C2?
3

```

et on obtient les solutions sous forme exacte :

```

C2
?
3
X=
Y=
4.3
-1.3

```

8 2 2 Avec une TI

On ouvre une fenêtre de programmation en tapant **[PRGM]** et on tape le nom du programme :

```
PROGRAM
Name=SYSL22■
```

Ensuite il va falloir prévoir l'entrée par l'utilisateur des coefficients $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. On a besoin de la commande Prompt qui s'obtient dans le menu **[PRGM]** dans l'onglet I/O :

```
CTL 1/0 EXEC
1:Input
2:Prompt
3:Disp
4:DispGraph
5:DispTable
6:Output(
7:getKey
```

Cela donne :

```
PROGRAM:SYSL22
:Prompt A,B,C,D,
E,F
```

Ensuite il faut créer les variables locales qui seront calculées à l'intérieur du programme et n'en sortiront pas. Il s'agit des déterminants. Pour nommer les variables, on ne peut utiliser que les 26 lettres de l'alphabet :

```
PROGRAM:SYSL22
:Prompt A,B,C,D,
E,F
:A*E-B*D→G
:C*E-F*B→H
:F*A-C*D→I
```

La petite flèche d'affectation s'obtient avec **[STO▶]**.

Il ne reste plus qu'à demander les résultats. Il faudra distinguer le cas où le déterminant du système est nul ou pas.

On va utiliser les commandes « If...Then...Else...End » accessibles dans le menu PGRM en tapant **[PRGM]**.

Le symbole = s'obtient en tapant **[2nd][TEST]** :

```

PROGRAM:SYSL22
:If G=0
:Then
:Disp "DET NUL"
:Else
:Disp H/G▶Frac,I
/G▶Frac
:End

```

Il reste à l'exécuter.

Pour résoudre :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

on entre les différentes valeurs des coefficients :

```

PrgmSYSL22
A=?

```

et on obtient :

```

C=?1
D=?2
E=?-1
F=?3
4/3
-1/3
Done

```