Définition 1 : Fonction numérique d'une variable réelle

On appelle fonction numérique d'une variable réelle un « mécanisme mathématique » qui, à tout nombre appartenant à un certain ensemble appelé **domaine de définition de la fonction**, associe un nouveau nombre, appelé **image** du nombre initial.

Exemple 1 :

Considérons par exemple la fonction qui à tout nombre réel associe le carré de son double auquel on ajoute dix-huit. Calculez les images de 7, $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{3}$.

Un peu d'histoire...

D'abord une date : 1692. C'est en effet cette année-là que Wilhelm Leibniz(1646-1716) introduisit officiellement le terme de *fonction* du latin *functio* : accomplissement, exécution qu a donné en français *fonctionnement*.
La notation que nous utilisons actuellement, à savoir $f(x)$ qui désigne l'image de x par la fonction f a été introduite un siècle plus tard par Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) dans sa « Théorie des fonctions analytiques » parue en 1797 dont vous pouvez voir un extrait figure I - page 2.
Pendant longtemps, $f(x)$ désigna aussi bien une fonction que l'image d'un nombre x par cette fonction. À partir de 1940, suite au travail du groupe de mathématiciens français Bourbaki, c'est f qui désigne la fonction et $f(x)$ ne désigne que l'image de x par la fonction f.
Au lieu de $f(x)$, on notait souvent avant Lagrange f_x l'image de x par la fonction f. Cette notation est restée aujourd'hui pour désigner un cas particulier de fonctions, les suites, que vous étudierez en classe de 1$^{\text{ère}}$.

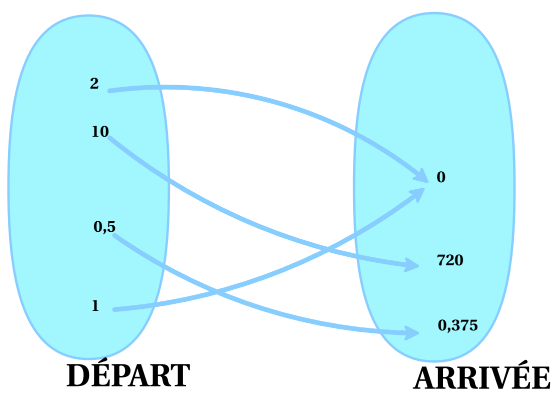
Fig. 2 – W. Leibniz

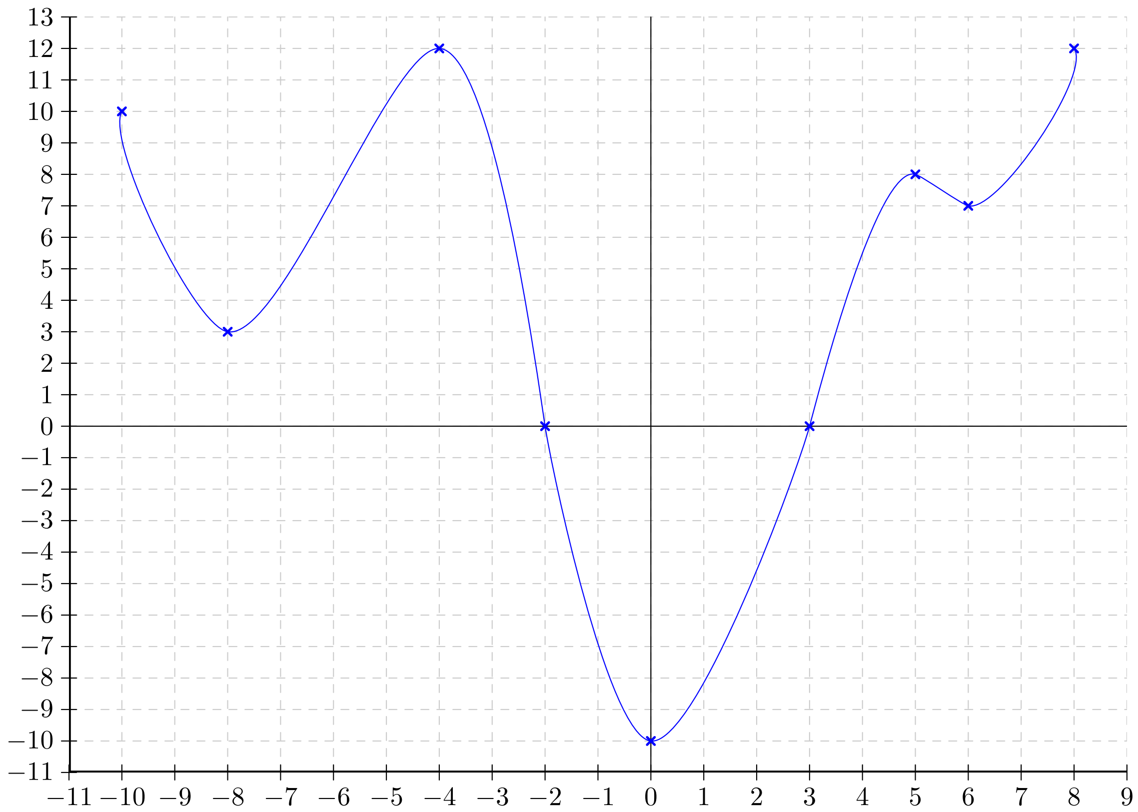
Définition 2 : fonction : notation et vocabulaire

Soit $\mathscr{D}_\varphi$ un ensemble. Une fonction φ est un « mécanisme mathématique » qui à tout nombre n appartenant à $\mathscr{D}_\varphi$ associe le nombre $\varphi(n)$ appelé **image** de n par φ.
On note :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_\varphi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$$

On appelle $\mathscr{D}_\varphi$ l'**ensemble de définition** de φ.
Le nombre n est **UN antécédent** de $\varphi(n)$ par φ.


2
10
0,5
1
0
720
0,375
DÉPART
ARRIVÉE


13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple 2 :

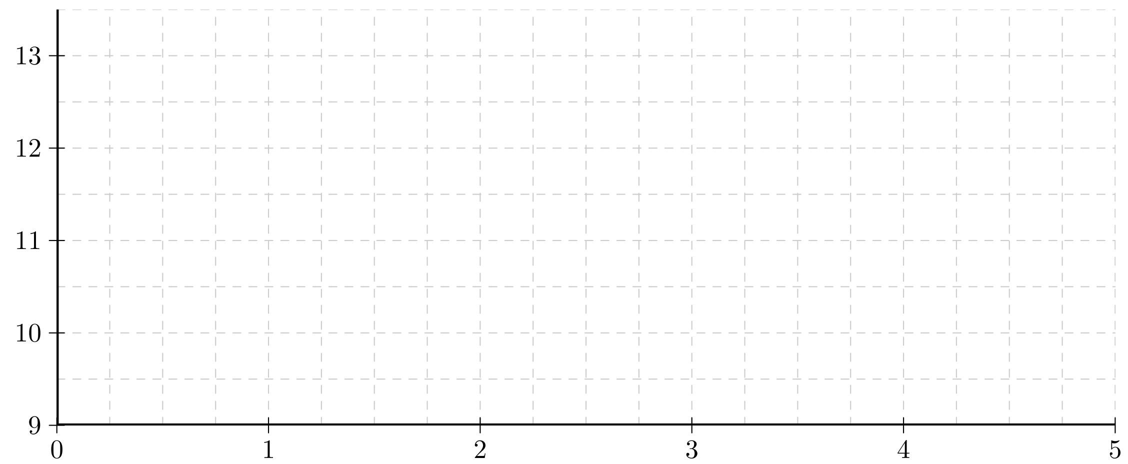
Ivan IVANOV, un dissident Bordure, décide de passer clandestinement la frontière borduro-syldave en empruntant un tunnel construit par la résistance. Malheureusement, le réseau a été infiltré par la police Bordure qui a placé une balise GPS sur Ivan ce qui permet de suivre son cheminement. Voici le tracé obtenu par les Bordures qui donne à chaque instant l'altitude en mètres d' Ivan en fonction du temps t exprimé en minutes sachant que $t = 0$ correspond au passage de la frontière :

En utilisant ce graphique, répondez aux questions suivantes avec la précision permise par le tracé.

Exemple 3 :

Des savants syldaves ont mis au point une formule donnant la hauteur h du gazon du jardin du Guide Suprême en centimètres en fonction du temps t en année écoulé depuis la Grande Révolution :

$$h(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$$



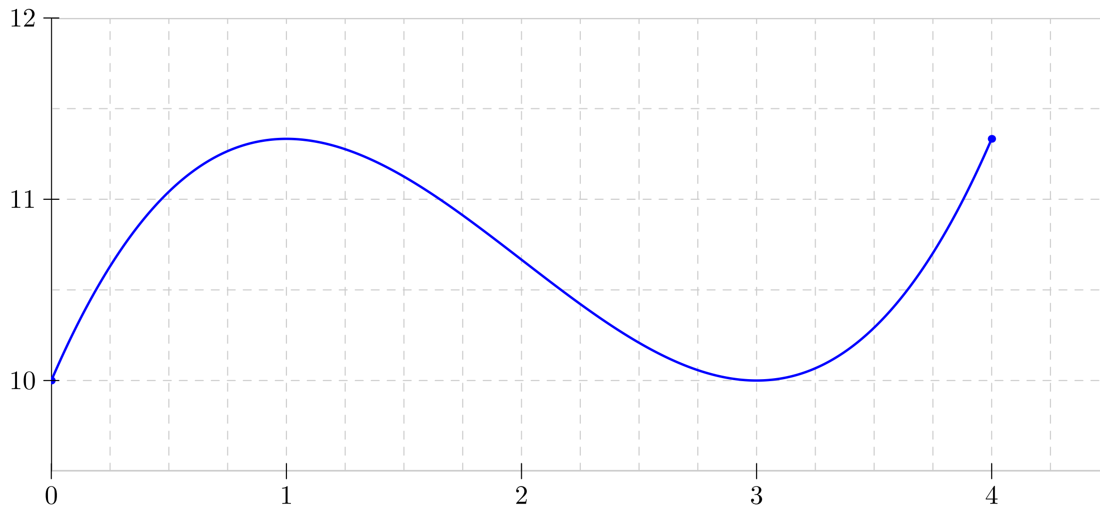
13
12
11
10
9
0
1
2
3
4
5

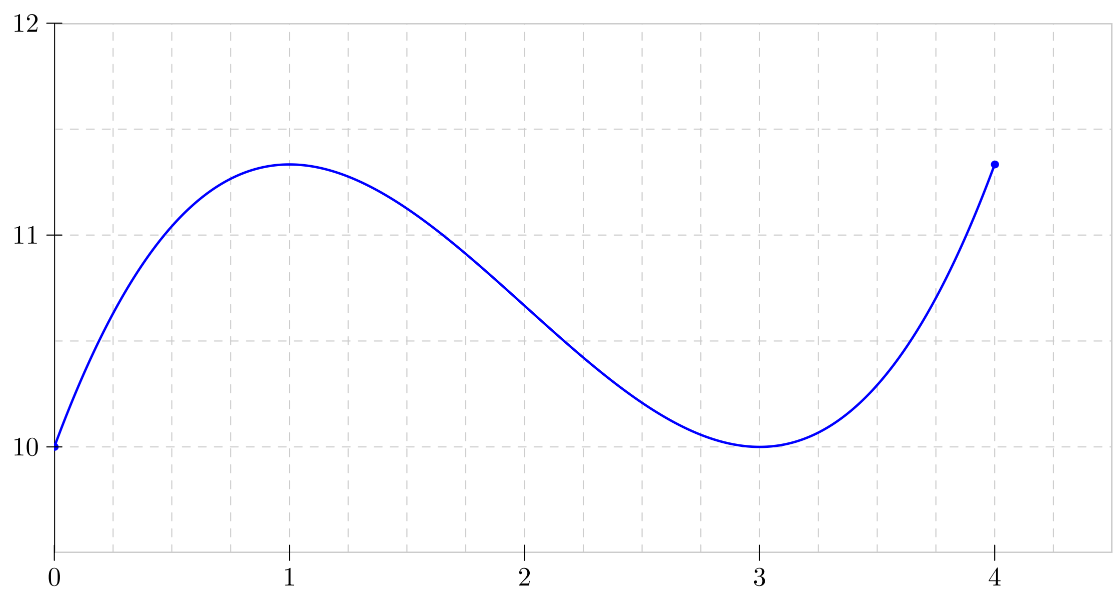
Définition 3 : représentation graphique d'une fonction

Soit φ une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_\varphi$ et un repère (O,I,J).
On appelle **représentation graphique de la fonction** φ l'ensemble des points de coordonnées $\left(t\,;\varphi(t)\right)$, avec $t \in \mathscr{D}_\varphi$.
On note souvent cet ensemble $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$

Attention !

Une courbe peut être… une droite. En effet, vous avez vu l'année dernière que la courbe représentative d'une fonction affine était une droite. Nous en reparlerons plus tard.


12
11
10
0
1
2
3
4


12
11
10
0
1
2
3
4

Attention !

Ces méthodes de résolutions d'équations et d'inéquations présentent deux gros inconvénients :

- on n'obtient que des APPROXIMATIONS des solutions. Pour vérifier s'il s'agit réellement d'une solution exacte, il faut effectuer un calcul ;
- on ne peut lire que les approximations des solutions qui apparaissent dans la « fenêtre » affichée. On ne peut donc pas savoir s'il en existe d'autres ailleurs.

Cependant, ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir localiser à peu près des solutions d'équations et d'inéquations que nous ne savons pas (encore) résoudre algébriquement.

Définition 4 : fonctions croissantes et décroissantes sur un intervalle

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite

- *croissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leqslant t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$;
- *décroissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leqslant t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \geqslant \varphi(t_2)$.

Exemple 4 :

Déterminer *graphiquement* le sens de variation de la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$ étudiée précédemment.

Définition 5 : fonction constante

Une fonction φ est *constante* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quels que soient réels t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Définition 6 : fonction monotone

Une fonction est monotone sur un intervalle I si, et seulement si, elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur cet intervalle.

Définition 7 : extremum local

Soit φ un fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Un réel M est un *maximum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \leqslant \mathrm{M}$$

C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe représentative de f sur l'intervalle J.

Un réel m est un *minimum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \geqslant m$$

C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe représentative de φ sur l'intervalle J.

Exemple 5 :

Déterminez *graphiquement* les extrema locaux de la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$ étudiée précédemment.

t	0		1		3		4
Variations de φ			$\frac{34}{3}$				$\frac{34}{3}$
	10	$\nearrow$		$\searrow$	10	$\nearrow$	