T$^{\text{ale}}$STI GE - Mathématiques - DS n°5

Mercredi 21 mars 2007

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-x} - 1$$

1. Étudier les variations de g (on ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$).

2. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x} - x + 3.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b) Déduire à l'aide de la **partie A** les variations de la fonction f.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x+3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Étudier, suivant les valeurs de x, la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

5. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

6. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x}$.
Déterminer les réels a et b pour que la fonction H définie par $\mathrm{H}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A,B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C} définies par :

$$z_{\mathrm{A}} = 2+2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = -2+2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{C}} = -\sqrt{3}+\mathrm{i}.$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C}.

2. a) Calculer $|z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}|^2$, $|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}|^2$ et $|z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}|^2$, puis interpréter géométriquement les trois modules.

b) En déduire la nature du triangle ABC.